

Guía de Matemáticas NM

Primeros exámenes: 2014





International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Programa del Diploma

Guía de Matemáticas NM

Primeros exámenes: 2014



Programa del Diploma Guía de Matemáticas NM

Versión en español del documento publicado en marzo de 2012 con el título
Mathematics SL guide

Publicada en marzo de 2012

Publicada en nombre de la Organización del Bachillerato Internacional, una fundación educativa sin fines de lucro con sede en 15 Route des Morillons, 1218 Le Grand-Saconnex, Ginebra (Suiza), por

International Baccalaureate Organization Ltd (Reino Unido)
Peterson House, Malthouse Avenue, Cardiff Gate
Cardiff, Wales CF23 8GL
Reino Unido
Tel.: + 44 29 2054 7777
Fax: +44 29 2054 7778
Sitio web: www.ibo.org

© Organización del Bachillerato Internacional, 2012

La Organización del Bachillerato Internacional (conocida como IB) ofrece tres programas educativos exigentes y de calidad a una comunidad de colegios en todo el mundo, con el propósito de crear un mundo mejor y más pacífico. Esta publicación forma parte de una gama de materiales producidos con el fin de apoyar dichos programas.

El IB puede utilizar diversas fuentes en su trabajo y comprueba la información para verificar su exactitud y autoría original, en especial al hacer uso de fuentes de conocimiento comunitario, como Wikipedia. El IB respeta la propiedad intelectual, y hace denodados esfuerzos por identificar y obtener la debida autorización de los titulares de los derechos antes de la publicación de todo material protegido por derechos de autor utilizado. El IB agradece la autorización recibida para utilizar el material incluido en esta publicación y enmendará cualquier error u omisión lo antes posible.

El uso del género masculino en esta publicación no tiene un propósito discriminatorio y se justifica únicamente como medio para hacer el texto más fluido. Se pretende que el español utilizado sea comprensible para todos los hablantes de esta lengua y no refleje una variante particular o regional de la misma.

Todos los derechos reservados. Esta publicación no puede reproducirse, almacenarse o distribuirse de forma total o parcial, en manera alguna ni por ningún medio, sin la previa autorización por escrito del IB, sin perjuicio de lo estipulado expresamente por la ley o por la política y normativa de uso de la propiedad intelectual del IB. Véase la página <http://www.ibo.org/es/copyright> del sitio web público del IB para más información.

Los artículos promocionales y las publicaciones del IB pueden adquirirse en la tienda virtual del IB, disponible en <http://store.ibo.org>. Las consultas sobre pedidos deben dirigirse al departamento de marketing y ventas en Cardiff.

Tel.: +44 29 2054 7746
Fax: +44 29 2054 7779
Correo-e: sales@ibo.org

International Baccalaureate, Baccalauréat International y Bachillerato Internacional
son marcas registradas de la Organización del Bachillerato Internacional.

Impreso en el Reino Unido por Anthony Rowe Ltd (Chippenham, Wiltshire)

Declaración de principios del IB

El Bachillerato Internacional (IB) tiene como meta formar jóvenes solidarios, informados y ávidos de conocimiento, capaces de contribuir a crear un mundo mejor y más pacífico, en el marco del entendimiento mutuo y el respeto intercultural.

En pos de este objetivo, la organización colabora con establecimientos escolares, gobiernos y organizaciones internacionales para crear y desarrollar programas de educación internacional exigentes y métodos de evaluación rigurosos.

Estos programas alientan a estudiantes del mundo entero a adoptar una actitud activa de aprendizaje durante toda su vida, a ser compasivos y a entender que otras personas, con sus diferencias, también pueden estar en lo cierto.

Perfil de la comunidad de aprendizaje del IB

El objetivo fundamental de los programas del IB es formar personas con mentalidad internacional que, conscientes de la condición que los une como seres humanos y de la responsabilidad que comparten de velar por el planeta, contribuyan a crear un mundo mejor y más pacífico.

Los miembros de la comunidad de aprendizaje del IB se esfuerzan por ser:

| | |
|--------------------------------|---|
| Indagadores | Desarrollan su curiosidad natural. Adquieren las habilidades necesarias para indagar y realizar investigaciones, y demuestran autonomía en su aprendizaje. Disfrutan aprendiendo y mantendrán estas ansias de aprender durante el resto de su vida. |
| Informados e instruidos | Exploran conceptos, ideas y cuestiones de importancia local y mundial y, al hacerlo, adquieren conocimientos y profundizan su comprensión de una amplia y equilibrada gama de disciplinas. |
| Pensadores | Aplican, por propia iniciativa, sus habilidades intelectuales de manera crítica y creativa para reconocer y abordar problemas complejos, y para tomar decisiones razonadas y éticas. |
| Buenos comunicadores | Comprenden y expresan ideas e información con confianza y creatividad en diversas lenguas, lenguajes y formas de comunicación. Están bien dispuestos a colaborar con otros y lo hacen de forma eficaz. |
| Íntegros | Actúan con integridad y honradez, poseen un profundo sentido de la equidad, la justicia y el respeto por la dignidad de las personas, los grupos y las comunidades. Asumen la responsabilidad de sus propios actos y las consecuencias derivadas de ellos. |
| De mentalidad abierta | Entienden y aprecian su propia cultura e historia personal, y están abiertos a las perspectivas, valores y tradiciones de otras personas y comunidades. Están habituados a buscar y considerar distintos puntos de vista y dispuestos a aprender de la experiencia. |
| Solidarios | Muestran empatía, sensibilidad y respeto por las necesidades y sentimientos de los demás. Se comprometen personalmente a ayudar a los demás y actúan con el propósito de influir positivamente en la vida de las personas y el medio ambiente. |
| Audaces | Abordan situaciones desconocidas e inciertas con sensatez y determinación y su espíritu independiente les permite explorar nuevos roles, ideas y estrategias. Defienden aquello en lo que creen con elocuencia y valor. |
| Equilibrados | Entienden la importancia del equilibrio físico, mental y emocional para lograr el bienestar personal propio y el de los demás. |
| Reflexivos | Evalúan detenidamente su propio aprendizaje y experiencias. Son capaces de reconocer y comprender sus cualidades y limitaciones para, de este modo, contribuir a su aprendizaje y desarrollo personal. |

Índice

| | |
|---|-----------|
| Introducción | 1 |
| Propósito de esta publicación | 1 |
| El Programa del Diploma | 2 |
| Naturaleza de la asignatura | 4 |
| Objetivos generales | 8 |
| Objetivos de evaluación | 9 |
| Programa de estudios | 10 |
| Resumen del programa de estudios | 10 |
| Enfoques de la enseñanza y el aprendizaje del curso | 11 |
| Temas relacionados con los conocimientos previos | 16 |
| Contenido del programa de estudios | 18 |
| Evaluación | 41 |
| La evaluación en el Programa del Diploma | 41 |
| Resumen de la evaluación | 43 |
| Evaluación externa | 44 |
| Evaluación interna | 47 |
| Apéndices | 54 |
| Glosario de términos de instrucción | 54 |
| Notación | 56 |

Propósito de esta publicación

El propósito de esta publicación es servir de guía a los colegios en la planificación, la enseñanza y la evaluación de la asignatura. Si bien está dirigida principalmente a los profesores, se espera que estos la utilicen para informar sobre la asignatura a padres y alumnos.

Esta guía está disponible en la página de la asignatura en el Centro pedagógico en línea (<http://occ.ibo.org>), un sitio web del IB protegido por contraseña concebido para proporcionar apoyo a los profesores del IB. También puede adquirirse en la tienda virtual del IB (<http://store.ibo.org>).

Otros recursos

En el Centro pedagógico en línea (CPEL) pueden encontrarse también publicaciones tales como materiales de ayuda al profesor, informes de la asignatura, información adicional sobre la evaluación interna y descriptores de las calificaciones finales. En la tienda virtual del IB se pueden adquirir exámenes de muestra, exámenes de convocatorias pasadas y esquemas de calificación.

Se anima a los profesores a que visiten el CPEL para ver materiales adicionales creados o utilizados por otros docentes. Se les invita también a aportar información sobre materiales que consideren útiles, por ejemplo: sitios web, libros, videos, publicaciones periódicas o ideas pedagógicas.

Primeros exámenes: 2014

El Programa del Diploma

El Programa del Diploma es un curso preuniversitario exigente de dos años de duración, para jóvenes de 16 a 19 años. Su currículo abarca una amplia gama de áreas de estudio y aspira a formar alumnos informados y con espíritu indagador, a la vez que solidarios y sensibles a las necesidades de los demás. Se da especial importancia a que los jóvenes desarrollen el entendimiento intercultural y una mentalidad abierta, así como las actitudes necesarias para respetar y evaluar distintos puntos de vista.

El hexágono del Programa del Diploma

El currículo del programa se representa mediante un hexágono dividido en seis áreas académicas dispuestas en torno a un núcleo (véase la figura 1), y fomenta el estudio de una variedad de áreas académicas durante los dos años. Los alumnos estudian dos lenguas modernas (o una lengua moderna y una clásica), una asignatura de humanidades o ciencias sociales, una ciencia experimental, una asignatura de matemáticas y una de las artes. Esta variedad hace del Programa del Diploma un curso exigente y muy eficaz como preparación para el ingreso a la universidad. Además, en cada una de las áreas académicas los alumnos tienen flexibilidad para elegir las asignaturas en las que estén particularmente interesados y que quizás deseen continuar estudiando en la universidad.

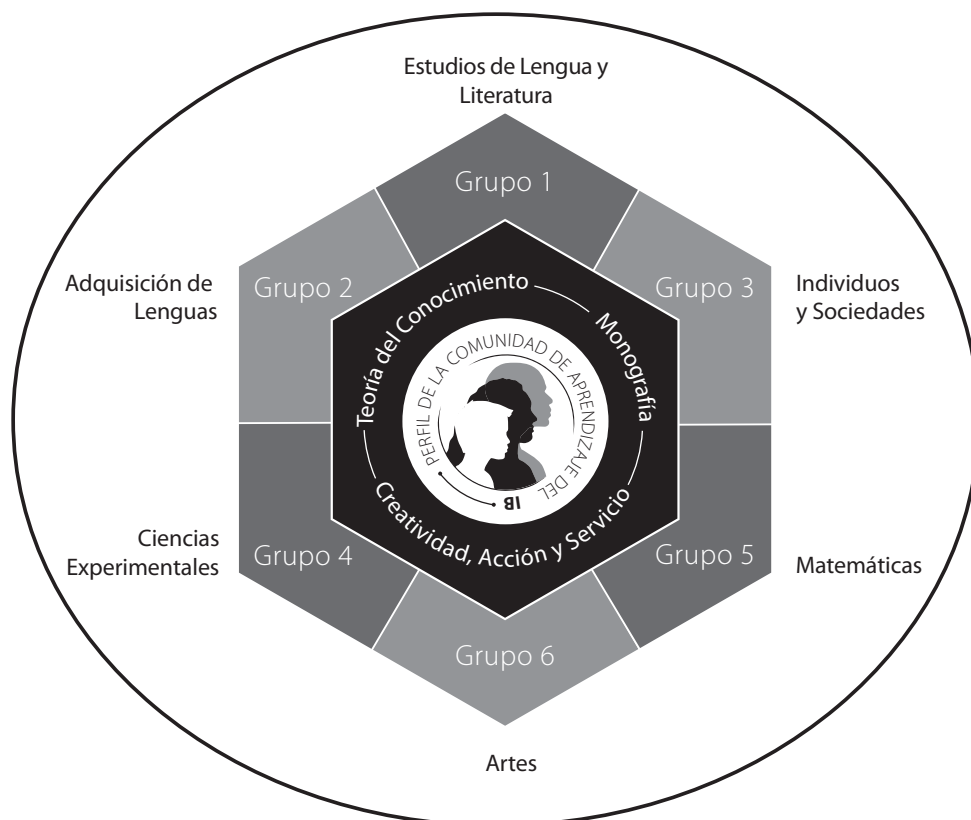


Figura 1
Modelo del Programa del Diploma

La combinación adecuada

Los alumnos deben elegir una asignatura de cada una de las seis áreas académicas, aunque también tienen la opción de elegir una segunda asignatura de los grupos del 1 al 5 en lugar de una asignatura del Grupo 6. Generalmente tres asignaturas (y no más de cuatro) deben cursarse en el Nivel Superior (NS) y las demás en el Nivel Medio (NM). El IB recomienda dedicar 240 horas lectivas a las asignaturas del NS y 150 a las del NM. Las asignaturas del NS se estudian con mayor amplitud y profundidad que las del NM.

En ambos niveles se desarrollan numerosas habilidades, en especial las de análisis y pensamiento crítico. Dichas habilidades se evalúan externamente al final del curso. En muchas asignaturas los alumnos realizan también trabajos que califica directamente el profesor en el colegio. Los exámenes pueden realizarse en español, francés e inglés, a excepción de los grupos 1 y 2: los exámenes de estos dos grupos se hacen en la lengua objeto de estudio.

El núcleo del hexágono

Todos los alumnos del Programa del Diploma deben completar los tres requisitos que conforman el núcleo del hexágono. La reflexión inherente a las actividades que los alumnos desarrollan en estas áreas es un principio fundamental de la filosofía del Programa del Diploma.

El curso de Teoría del Conocimiento anima a los alumnos a reflexionar sobre la naturaleza del conocimiento y el proceso de aprendizaje que tiene lugar en las asignaturas que estudian como parte del Programa del Diploma, y a establecer conexiones entre las áreas académicas. La Monografía, un trabajo escrito de unas 4.000 palabras, ofrece a los alumnos la oportunidad de investigar un tema de su elección que les interese especialmente. Asimismo, los estimula a desarrollar las habilidades necesarias para llevar a cabo una investigación independiente, habilidades que deberán poner en práctica en la universidad. Creatividad, Acción y Servicio posibilita el aprendizaje experiencial mediante la participación de los alumnos en una variedad de actividades artísticas, deportivas, físicas y de servicio a la comunidad.

La declaración de principios del IB y el perfil de la comunidad de aprendizaje del IB

El Programa del Diploma se propone desarrollar en los alumnos los conocimientos, las habilidades y las actitudes que necesitarán para alcanzar las metas del IB, tal como aparecen expresadas en su declaración de principios y en el perfil de la comunidad de aprendizaje del IB. La enseñanza y el aprendizaje en el Programa del Diploma representan la puesta en práctica de la filosofía educativa del IB.

Naturaleza de la asignatura

Introducción

La naturaleza de las matemáticas se puede resumir de varias maneras, por ejemplo, como un conjunto de conocimientos bien definido, un sistema abstracto de ideas o una herramienta útil. Es probable que para muchas personas sea una combinación de estas tres cosas, pero no hay duda de que el conocimiento matemático proporciona una clave importante para la comprensión del mundo en que vivimos. Las matemáticas pueden aparecer en nuestra vida de diversas formas: al comprar productos en el mercado, consultar un horario, leer un periódico, cronometrar un proceso o estimar una longitud. Para muchos de nosotros, las matemáticas también forman parte de nuestra profesión: los pintores han de aprender perspectiva, los músicos deben comprender las relaciones matemáticas dentro de un mismo ritmo y entre ritmos distintos, los economistas tienen que reconocer tendencias en las transacciones financieras y los ingenieros deben tener en cuenta los tipos de tensión de los materiales. Los científicos consideran las matemáticas como un lenguaje fundamental para la comprensión de lo que ocurre en la naturaleza. Algunas personas disfrutan de los desafíos que plantean los métodos lógicos de las matemáticas y de la aventura del razonamiento que suponen las demostraciones. Para otras, las matemáticas constituyen una experiencia estética o incluso uno de los pilares de la filosofía. Este predominio de las matemáticas en nuestra vida, con todas sus conexiones interdisciplinarias, ofrece motivos claros y suficientes para que sea una asignatura obligatoria para aquellos alumnos que cursan el Programa del Diploma completo.

Presentación de los cursos

Debido a las diversas necesidades, intereses y capacidades de los alumnos, existen cuatro cursos distintos de matemáticas pensados para diferentes grupos de alumnos: aquellos que quieren estudiar matemáticas en profundidad como una disciplina en sí misma o por su interés en materias afines; los que desean adquirir un cierto grado de comprensión y conocimiento que les ayude en el estudio de otras asignaturas; y aquellos que todavía no son conscientes de la relación que pueden tener las matemáticas con sus estudios y con la vida cotidiana. Cada curso está concebido para satisfacer las necesidades de un grupo concreto de alumnos. Así pues, los alumnos deben elegir cuidadosamente el curso más adecuado para ellos.

Para tomar esta decisión, se debe aconsejar a cada alumno que tenga en cuenta los siguientes factores:

- Las destrezas matemáticas que posee y el área de las matemáticas en la que pueda obtener mejores resultados
- Su interés personal en las matemáticas y las áreas de la asignatura que puedan resultarle más interesantes
- Las otras asignaturas que elige en el Programa del Diploma
- Sus planes académicos para el futuro, en concreto, las asignaturas que desea estudiar
- La profesión que desea desempeñar en el futuro

Se espera que los profesores presten ayuda en este proceso y aconsejen a los alumnos.

Estudios Matemáticos NM

Este curso se ofrece solo en el Nivel Medio (NM) y su nivel es equivalente al de Matemáticas NM, pero aborda distintas necesidades. Hace hincapié en las aplicaciones de las matemáticas y la parte más extensa es sobre técnicas estadísticas. Está diseñado para alumnos con distintas capacidades y niveles de conocimiento matemáticos, y les ofrece oportunidades para aprender conceptos y técnicas importantes, así como para comprender una amplia variedad de temas matemáticos. Asimismo, los prepara para ser capaces de resolver problemas en distintos contextos, desarrollar un razonamiento matemático más complejo y mejorar su pensamiento crítico. El proyecto individual consiste en un trabajo extenso basado en una investigación personal que implica la recopilación, el análisis y la evaluación de información. Los alumnos que realizan este curso están bien preparados para las carreras de ciencias sociales, humanidades, lenguas o artes. Es posible que necesiten hacer uso, en sus futuros estudios, de la estadística y el pensamiento lógico que aprendan como parte del curso de Estudios Matemáticos NM.

Matemáticas NM

Este curso está destinado a alumnos que ya tienen conocimientos sobre los conceptos matemáticos fundamentales y que poseen las destrezas necesarias para aplicar correctamente técnicas matemáticas sencillas. La mayoría de estos alumnos va a necesitar una formación matemática sólida como preparación para sus estudios posteriores en áreas tales como la química, la economía, la psicología, y la administración y gestión de empresas.

Matemáticas NS

Este curso está destinado a alumnos con una buena formación matemática que poseen una serie de destrezas analíticas y técnicas. Para la mayoría de estos alumnos, las matemáticas constituirán uno de los componentes fundamentales de sus estudios universitarios, como materia en sí misma o en áreas tales como la física, la ingeniería y la tecnología. Para otros la elección puede deberse a que tengan un gran interés por las matemáticas, les atraigan sus desafíos y disfruten con la resolución de los problemas que se plantean.

Ampliación de Matemáticas NS

Este curso se ofrece solo en el Nivel Superior (NS). Está destinado a alumnos con una sólida formación matemática que han alcanzado un alto nivel de competencia en una serie de destrezas analíticas y técnicas, y que muestran un interés considerable por la materia. La mayor parte de estos alumnos pretende seguir estudios de matemáticas en la universidad, bien como materia en sí misma o bien como componente fundamental de algún área relacionada con ella. El curso se ha concebido específicamente para que los alumnos puedan comprender en profundidad diversas ramas de las matemáticas y conocer también sus aplicaciones prácticas. Se espera que los alumnos que elijan este curso también elijan Matemáticas NS.

Nota: Matemáticas NS es un curso ideal para aquellos alumnos que desean hacer de las matemáticas un componente importante en sus estudios universitarios, bien como materia en sí misma o como parte de cursos como física, ingeniería o tecnología. No se debe considerar necesario que tales alumnos realicen la Ampliación de Matemáticas NS. Por el contrario, Ampliación de Matemáticas NS es un curso opcional para alumnos con una aptitud e interés especiales en las matemáticas, que los capacitará para estudiar algunos aspectos más amplios y profundos de las mismas, pero no es, en ningún caso, una titulación necesaria para seguir estudios superiores de matemáticas.

Matemáticas NM: descripción del curso

Este curso dirige su atención a la introducción de conceptos matemáticos importantes a través del desarrollo de técnicas matemáticas. Su propósito es introducir a los alumnos a estos conceptos de un modo coherente y comprensible, más que hacer hincapié en el rigor matemático requerido en Matemáticas NS. Los alumnos han de aplicar, en lo posible, el conocimiento matemático que han adquirido a la resolución de problemas prácticos situados en un contexto adecuado.

El componente de la evaluación interna, la exploración, ofrece a los alumnos una oportunidad para el desarrollo de su aprendizaje matemático de forma independiente. Se anima a que los alumnos adopten un enfoque reflexivo respecto a diversas actividades matemáticas y que exploren distintas ideas matemáticas. La exploración también permite que los alumnos trabajen sin las limitaciones de tiempo de los exámenes escritos y que desarrollen las destrezas necesarias para exponer ideas matemáticas.

Este curso no tiene la profundidad de Matemáticas NS. Los alumnos que deseen estudiar una asignatura con un alto grado de contenido matemático deben, por tanto, elegir Matemáticas NS en lugar del curso de Matemáticas NM.

Conocimientos previos

Las matemáticas constituyen una materia lineal y se espera que la mayoría de los alumnos que elijan un curso de matemáticas del Programa del Diploma (PD) hayan estudiado matemáticas durante, al menos, 10 años. Los alumnos habrán estudiado una gran variedad de temas, con distintos enfoques de la enseñanza y el aprendizaje. Por lo tanto, contarán con una amplia diversidad de destrezas y conocimientos al comenzar el curso de Matemáticas NM. La mayoría tendrá alguna formación en aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, probabilidad y estadística. A algunos les resultará familiar el enfoque de indagación y es probable que hayan tenido ocasión de realizar un trabajo extenso de matemáticas.

Al comienzo de la sección del programa de estudios, hay una lista de temas que, se presume, los alumnos deben ya conocer para el curso de Matemáticas NM. Se entiende que algunos de ellos pueden ser desconocidos para algunos alumnos, pero se prevé que puede haber otros temas dentro del programa de estudios que los alumnos ya conozcan. Los profesores deben planificar la enseñanza de modo que se incorporen los temas mencionados que sean desconocidos para sus alumnos.

Vínculos con el Programa de los Años Intermedios

Los temas relacionados con los conocimientos previos de los cursos del PD han sido elaborados conjuntamente con la *Guía de Matemáticas* del Programa de los Años Intermedios (PAI). Los enfoques de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas del PD se basan en los enfoques utilizados en el PAI. Estos incluyen investigaciones, exploración y una variedad de herramientas de evaluación.

El documento *El continuo de Matemáticas del IB: del PAI al Programa del Diploma* (noviembre de 2010) está disponible en las páginas de matemáticas del PD en el Centro pedagógico en línea (CPEL). Esta extensa publicación se centra en la coherencia entre las matemáticas en el Programa de los Años Intermedios y el Programa del Diploma. Se desarrolló en respuesta a los comentarios proporcionados por los Colegios del Mundo del IB, que expresaban la necesidad de articular la transición de Matemáticas del Programa de los Años Intermedios a los cursos de matemáticas del Programa del Diploma. La publicación también destaca las similitudes y diferencias entre las matemáticas del PAI y las del PD, y constituye un valioso recurso para los profesores.

Matemáticas y Teoría del Conocimiento

La *Guía de Teoría del Conocimiento* (marzo de 2006) identifica cuatro formas de conocimiento, y se puede afirmar que todas ellas tienen una función en la adquisición de conocimientos matemáticos. Si bien es probable que, en un principio, las matemáticas estén inspiradas por los datos de la percepción sensorial, estas están dominadas por la razón y algunos matemáticos sostienen que su materia es un lenguaje que, de algún

modo, es universal. Sin embargo, tampoco hay duda alguna de que los matemáticos perciben la belleza en las matemáticas y que la emoción puede ser un motor poderoso en la búsqueda del conocimiento matemático.

Como un área de conocimiento, las matemáticas parecen proporcionar una certeza que, quizás, falta en otras disciplinas. Esto puede estar relacionado con la “pureza” de la materia, que la hace a veces parecer divorciada de la realidad. Sin embargo, las matemáticas también proporcionan un conocimiento importante sobre el mundo, y el uso de las matemáticas en la ciencia y la tecnología ha constituido una de las fuerzas impulsoras de los avances científicos.

A pesar de todo su indudable poder para facilitar el entendimiento y el cambio, las matemáticas son finalmente un fenómeno desconcertante. Un interrogante fundamental para todos los entendidos es si el conocimiento matemático realmente existe con independencia de nuestro pensamiento respecto del mismo; ¿está “esperando ser descubierto” o es una creación del ser humano?

Se debe atraer la atención de los alumnos hacia cuestiones que relacionan la Teoría del Conocimiento (TdC) con las matemáticas, y animarlos a plantear tales cuestiones por sí mismos, en las clases de Matemáticas y en las de Teoría del Conocimiento. Esto incluye el cuestionamiento de todas las afirmaciones anteriores. En la columna “Vínculos” del contenido del programa de estudios se proporcionan ejemplos relacionados con Teoría del Conocimiento. Los profesores también pueden discutir sobre cuestiones tales como las que se plantean en la sección “Áreas de conocimiento” de la *Guía de Teoría del Conocimiento*.

Matemáticas y la dimensión internacional

Las matemáticas son, de algún modo, un lenguaje internacional y, aparte de algunas ligeras diferencias en la notación, los matemáticos de todo el mundo se pueden comunicar en su campo. Aunque las matemáticas trascienden la política, la religión y la nacionalidad, a través de la historia grandes civilizaciones deben su éxito, en parte, a la capacidad de sus matemáticos para crear y mantener estructuras sociales y arquitectónicas complejas.

A pesar de los recientes avances en el desarrollo de las tecnologías de la información y las comunicaciones, el intercambio global de información e ideas matemáticas no es un fenómeno nuevo y ha sido esencial para el desarrollo de las matemáticas. En efecto, muchos de los fundamentos de la matemática moderna fueron establecidos hace muchos siglos por las civilizaciones árabe, griega, india y china, entre otras. Los profesores pueden utilizar sitios web que incluyan líneas de tiempo para mostrar las contribuciones que las distintas civilizaciones han hecho a las matemáticas y no solo por sus contenidos matemáticos. Dar a conocer los personajes y personalidades de los matemáticos en cuestión, así como el contexto histórico en el que trabajaban, pone de relieve la dimensión humana y cultural de las matemáticas.

La importancia de las ciencias y la tecnología en el mundo cotidiano es evidente, pero el papel fundamental de las matemáticas no está tan claramente reconocido. Es el lenguaje de la ciencia y sustenta la mayoría de los desarrollos en las ciencias y la tecnología. Un buen ejemplo de ello es la revolución digital que está transformando el mundo, basada en el sistema de numeración binario de las matemáticas.

Ya existen varios organismos internacionales para promover las matemáticas. Se anima a los alumnos a acceder a los sitios web de las organizaciones matemáticas internacionales para apreciar mejor la dimensión internacional y participar en las cuestiones globales en torno a la materia.

En la columna “Vínculos” del programa de estudios se proporcionan ejemplos de temas globales relacionados con la mentalidad internacional (**Dimensión internacional**).

Objetivos generales

Objetivos generales del Grupo 5

Todos los cursos de matemáticas del Grupo 5 tienen como meta permitir a los alumnos:

1. Disfrutar de las matemáticas y llegar a apreciar la elegancia y las posibilidades que ofrecen
2. Desarrollar una comprensión de los principios y la naturaleza de la asignatura
3. Comunicarse con claridad y confianza en diversos contextos
4. Desarrollar el pensamiento lógico, crítico y creativo, y desarrollar paciencia y constancia en la resolución de problemas
5. Emplear y perfeccionar sus capacidades de abstracción y generalización
6. Aplicar destrezas a distintas situaciones, a otras áreas de conocimiento y a futuros desarrollos
7. Apreciar cómo los avances tecnológicos han influido en los avances en matemáticas, y viceversa
8. Apreciar las implicaciones morales, sociales y éticas del trabajo de los matemáticos y las aplicaciones de las matemáticas
9. Apreciar la dimensión internacional de las matemáticas, reconociendo su universalidad y sus perspectivas multiculturales e históricas
10. Valorar la contribución de las matemáticas a otras disciplinas y como un área de conocimiento específica en el curso de Teoría del Conocimiento

Objetivos de evaluación

La resolución de problemas es fundamental en el aprendizaje de matemáticas, e implica la adquisición de destrezas y conceptos matemáticos en una amplia variedad de situaciones, incluidos los problemas que no son de rutina, los problemas abiertos y los problemas de la vida real. Tras haber completado el curso de Matemáticas NM del Programa del Diploma, se espera que los alumnos demuestren lo siguiente:

1. **Conocimiento y comprensión:** recordar, seleccionar y utilizar su conocimiento de los hechos, los conceptos y las técnicas matemáticas en una diversidad de contextos conocidos y desconocidos
2. **Resolución de problemas:** recordar, seleccionar y utilizar su conocimiento de las destrezas, los resultados y los modelos matemáticos, tanto en contextos reales como abstractos, para resolver problemas
3. **Comunicación e interpretación:** transformar en matemáticas contextos realistas comunes; hacer comentarios sobre el contexto; dibujar aproximadamente o con precisión diagramas, gráficos o construcciones matemáticas tanto en papel como utilizando medios tecnológicos; registrar métodos, soluciones y conclusiones utilizando notación estandarizada
4. **Tecnología:** utilizar los medios tecnológicos de forma precisa, adecuada y eficaz para explorar nuevas ideas y resolver problemas
5. **Razonamiento:** elaborar argumentos matemáticos mediante el uso de enunciados precisos, deducciones lógicas e inferencia, y mediante la manipulación de expresiones matemáticas
6. **Enfoques basados en la indagación:** investigar situaciones desconocidas, abstractas y concretas, que conllevan la organización y el análisis de información, la formulación de conjeturas, la extracción de conclusiones y la comprobación de su validez

Resumen del programa de estudios

| Componente del programa de estudios | Horas lectivas |
|---|----------------|
| | NM |
| Todas las unidades son obligatorias. Los alumnos deberán estudiar todos los temas de cada una de las unidades del programa de estudios que se especifican en esta guía. Los alumnos también deben estar familiarizados con los temas que se mencionan en la sección de conocimientos previos. | |
| Unidad 1 Álgebra | 9 |
| Unidad 2 Funciones y ecuaciones | 24 |
| Unidad 3 Funciones circulares y trigonometría | 16 |
| Unidad 4 Vectores | 16 |
| Unidad 5 Estadística y probabilidad | 35 |
| Unidad 6 Análisis | 40 |
| Exploración matemática La evaluación interna en Matemáticas NM es una exploración individual. Consiste en un trabajo escrito basado en la investigación de un área de las matemáticas. | 10 |
| Total de horas lectivas | 150 |

Enfoques de la enseñanza y el aprendizaje del curso

A lo largo del curso de Matemáticas NM del Programa del Diploma, se debe animar a los alumnos a desarrollar su comprensión de la metodología y práctica de esta disciplina. Se deben introducir de forma adecuada los procesos de **indagación matemática**, **utilización de modelos matemáticos** y el **uso de la tecnología**. Estos procesos deben utilizarse a lo largo de todo el curso, y no tratarlos de modo aislado.

Indagación matemática

El perfil de la comunidad de aprendizaje del IB fomenta el aprendizaje a través de la experimentación, el cuestionamiento y el descubrimiento. En las clases del IB, los alumnos deben, por lo general, aprender matemáticas por medio de la participación activa en actividades de aprendizaje, en lugar de ser receptores de la enseñanza. Los profesores deben pues proporcionar a los alumnos oportunidades de aprender a través de la indagación matemática. Este enfoque está ilustrado en la figura 2.

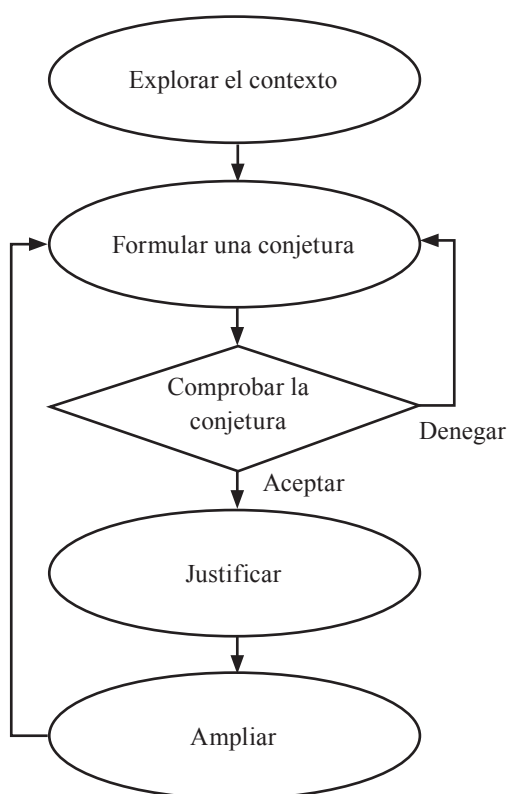


Figura 2

Utilización de modelos matemáticos

Los alumnos han de ser capaces de utilizar las matemáticas para resolver problemas de la vida real. Interesar a los alumnos en el proceso de utilización de modelos matemáticos proporciona tales oportunidades. Los alumnos deben desarrollar modelos, aplicarlos y analizarlos de modo crítico. Este enfoque está ilustrado en la figura 3.

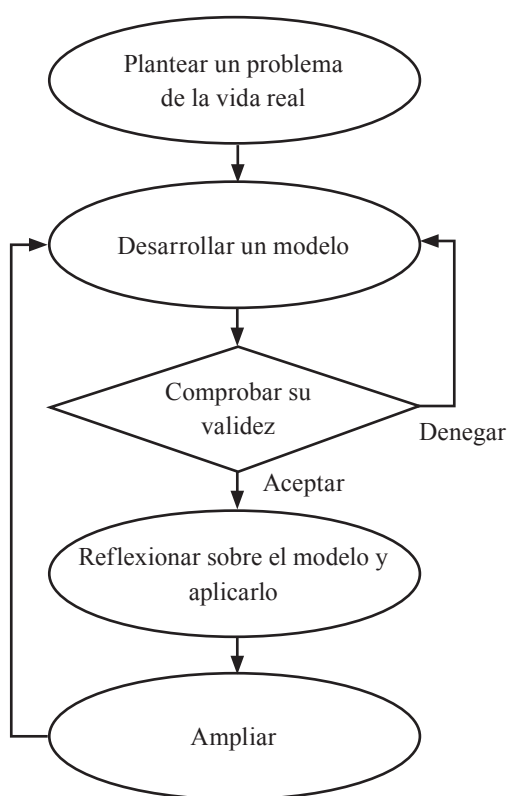


Figura 3

Tecnología

La tecnología es una herramienta poderosa en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se puede utilizar para potenciar la visualización y ayudar al alumno a comprender conceptos matemáticos. Puede ser útil en la recopilación, registro, organización y análisis de datos. También permite incrementar el ámbito de los tipos de problemas accesibles a los alumnos. El uso de la tecnología aumenta la viabilidad para que los alumnos trabajen en contextos de problemas interesantes donde reflexionan, razonan, resuelven problemas y toman decisiones.

Los profesores deben comenzar por proporcionar una orientación sustancial al ligar los temas vinculantes de la **indagación matemática**, la **utilización de modelos matemáticos** y el **uso de la tecnología**, y animar después gradualmente a los alumnos a hacerse más independientes como indagadores y como pensadores. Los alumnos del IB deben aprender a convertirse en sólidos comunicadores en el lenguaje de las matemáticas. Los profesores deben crear un entorno de aprendizaje seguro en el que los alumnos se sientan cómodos al asumir riesgos.

Se anima a que los profesores relacionen las matemáticas objeto de estudio con otras asignaturas y con la vida real, en especial con temas de especial importancia e interés para los alumnos. Se deben incorporar a las clases las cuestiones y los problemas cotidianos para motivar a los alumnos y que los materiales mantengan su pertinencia; en la columna “Vínculos” del programa de estudios se proporcionan sugerencias. La exploración matemática ofrece una oportunidad de investigar la utilidad, la pertinencia y la presencia de las matemáticas en la vida cotidiana y añade una dimensión más al curso. La comunicación se debe basar en formas matemáticas (por ejemplo, fórmulas, diagramas, gráficos, etc.), acompañadas de los comentarios pertinentes. La utilización de modelos, la investigación, la reflexión, la implicación personal y la comunicación matemática deben ser, por tanto, características destacadas en la clase de matemáticas del Programa del Diploma.

Para obtener más información sobre los enfoques de la enseñanza de un curso del Programa del Diploma, véase la publicación *El Programa del Diploma: de los principios a la práctica* (abril de 2009). El Centro pedagógico en línea (CPEL) ofrece una variedad de recursos de ayuda para los profesores y, en el sitio web público, se encuentra disponible la información sobre los talleres de desarrollo profesional.

Estructura del programa de estudios

- **Contenido:** esta columna especifica, dentro de cada unidad, los temas que se deben tratar.
- **Información adicional:** esta columna contiene información más detallada acerca de los temas específicos incluidos en la columna “Contenido”. Esto aclara los contenidos con vistas a los exámenes.
- **Vínculos:** esta columna proporciona vínculos útiles con los objetivos generales del curso de Matemáticas NM, sugerencias para debates, ejemplos de la vida real e ideas para seguir investigando. **Estas sugerencias son solo una guía para presentar e ilustrar los temas, y no son exhaustivas.** Los vínculos están rotulados como se muestra a continuación:

| | |
|--------------------------------|---|
| Aplicación | Ejemplos de la vida real y vínculos con otros cursos del Programa del Diploma |
| Dimensión internacional | Mentalidad internacional con relación al tema |
| Objetivo general 8 | Implicaciones morales, sociales y éticas del tema |
| TdC | Sugerencias para el debate (Teoría del Conocimiento) |

Téngase en cuenta que cualquier referencia en la columna “Vínculos” del programa de estudios a las guías de otros cursos será siempre a las versiones vigentes de dichas guías (2012).

Observaciones sobre el programa de estudios

- Las fórmulas solo se incluyen en este documento donde pueda existir alguna ambigüedad. Todas las fórmulas que se requieren para el curso se encuentran en el cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NM.
- El término “tecnología” designa cualquier tipo de calculadora o computador disponible. Sin embargo, existen restricciones sobre los medios tecnológicos que se pueden usar en los exámenes; estas se especificarán en los documentos pertinentes.
- Los términos “análisis” y “enfoque analítico” se usan generalmente para referirse a un enfoque que no hace uso de la tecnología.

Programación del curso

Se ha de impartir el contenido de las seis unidades del programa de estudios, aunque no necesariamente en el orden en que aparecen en esta guía. Se espera que los profesores programen el curso de modo que se responda a las necesidades de sus alumnos y se incluyan, cuando sea necesario, los temas señalados en la sección de conocimientos previos.

Integración de la exploración matemática

El trabajo relacionado con la exploración debe integrarse totalmente en la programación del curso. En la sección sobre la evaluación interna y en el material de ayuda al profesor se proporciona información sobre cómo hacerlo.

Temporalización

La carga horaria recomendada para los cursos del Nivel Medio es de 150 horas. En el caso de Matemáticas NM, se espera que 10 de esas horas se dediquen a la exploración. La distribución de tiempo establecida en esta guía es aproximada y tiene por finalidad sugerir cómo podrían distribuirse las restantes 140 horas de enseñanza del programa de estudios. Sin embargo, el tiempo exacto dedicado a cada unidad dependerá de diversos factores, como la formación previa y el nivel de preparación de cada alumno. Los profesores deben pues ajustar este esquema a las necesidades de sus alumnos.

Uso de calculadoras

Se espera que los alumnos dispongan de una calculadora de pantalla gráfica durante el curso, en todo momento. Se proporcionará a los colegios información actualizada con respecto a los requisitos mínimos a medida que la tecnología evolucione. Los profesores y los colegios deben supervisar el uso de las calculadoras de acuerdo con la reglamentación sobre las mismas. En el *Manual de procedimientos del Programa del Diploma* se proporciona un reglamento sobre los tipos de calculadoras permitidos en los exámenes. Se puede obtener más información y asesoramiento en el documento *Material de ayuda al profesor de Matemáticas NS y NM: calculadoras de pantalla gráfica* (septiembre de 2005) y en el CPEL.

Cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NM

Es necesario que cada alumno disponga de un ejemplar sin anotaciones de este cuadernillo durante el examen. Se recomienda a los profesores asegurarse de que los alumnos estén familiarizados con el contenido de este documento desde el principio del curso. El colegio será el encargado de descargarlo desde IBIS o el CPEL, comprobar que no contenga errores de impresión y asegurarse de contar con un número suficiente de copias disponibles para todos los alumnos.

Material de ayuda al profesor

Esta guía se complementa con una serie de materiales de ayuda al profesor. Los materiales incluyen asesoramiento para los profesores en cuanto a la presentación, planificación y corrección de la exploración, así como exámenes de muestra y esquemas de calificación.

Términos de instrucción y notación

Los profesores y los alumnos deberán conocer la notación del IB y los términos de instrucción (anteriormente llamados “términos de examen”), ya que se emplean sin explicación en las pruebas de examen. El glosario de términos de instrucción y la notación aparecen como apéndices en esta guía.

Temas relacionados con los conocimientos previos

Como ya se mencionó anteriormente en el apartado sobre conocimientos previos, se espera que todos los alumnos tengan una amplia experiencia matemática previa, aunque esto suele variar. Se espera que los alumnos de Matemáticas NM estén familiarizados con los siguientes temas antes de los exámenes, ya que las preguntas presuponen el conocimiento de los mismos. Los profesores deberán, por tanto, asegurarse de que cualquier tema de esta lista que sus alumnos no dominen al principio del curso se imparta en las primeras etapas del mismo. Deberán también tener en cuenta el conocimiento matemático que sus alumnos ya posean a la hora de diseñar una programación del curso adecuada para Matemáticas NM. Esta lista incluye los conocimientos, junto con los contenidos del programa de estudios, que son imprescindibles para poder completar con éxito el curso de Matemáticas NM.

Los alumnos también deben conocer las unidades de longitud, masa y tiempo del SI (Sistema Internacional) y sus unidades derivadas.

| Tema | Contenido |
|----------------------------|---|
| Número | <p>Uso habitual de la suma, resta, multiplicación y división con enteros, decimales y fracciones, incluido el orden de las operaciones.</p> <p>Potencias sencillas con exponente positivo.</p> <p>Simplificación de expresiones con radicales (irracionales o no).</p> <p>Números y factores primos, incluido el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.</p> <p>Aplicaciones sencillas de razones, porcentajes y proporciones, en relación con la semejanza.</p> <p>Definición y uso elemental del valor absoluto (módulo), a.</p> <p>Redondeo, aproximaciones decimales y cifras significativas, incluyendo la estimación de errores.</p> <p>Expresión de números en forma estándar (notación científica), es decir, $a \times 10^k$, $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.</p> |
| Conjuntos y números | <p>Concepto y notación de conjunto, elemento, conjunto universal (referencial), conjunto vacío (nulo), conjunto complementario, subconjunto, igualdad de conjuntos, conjuntos disjuntos.</p> <p>Operaciones con conjuntos: unión e intersección.</p> <p>Propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.</p> <p>Diagramas de Venn.</p> <p>Conjuntos de números: números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.</p> <p>Intervalos de la recta real utilizando la notación de conjuntos y las inecuaciones. Conjunto de soluciones de una inecuación lineal indicado en la recta numérica y expresado mediante la notación de conjuntos.</p> <p>Aplicaciones entre conjuntos. Ejemplos con conjuntos de pares ordenados, tablas, diagramas y gráficos.</p> |

| Tema | Contenido |
|-----------------------------------|--|
| Álgebra | <p>Manejo de expresiones algebraicas sencillas que incluya factorización y desarrollo, así como las expresiones cuadráticas.</p> <p>Transformación, cálculo del valor numérico y combinación de expresiones sencillas. Se deben incluir ejemplos relacionados con otras asignaturas, en especial las de ciencias.</p> <p>La función lineal y su gráfico, pendiente e intersección con el eje y.</p> <p>Suma y resta de fracciones algebraicas.</p> <p>Propiedades de las relaciones de orden: $<, \leq, >, \geq$.</p> <p>Resolución de ecuaciones e inecuaciones con una incógnita, incluidos los casos con coeficientes racionales.</p> <p>Resolución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.</p> |
| Trigonometría | <p>Medida de ángulos en grados. Rumbos y demoras con tres cifras.</p> <p>Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Aplicaciones sencillas a la resolución de triángulos.</p> <p>Teorema de Pitágoras y su recíproco.</p> |
| Geometría | <p>Transformaciones geométricas sencillas: traslación, simetría, rotación, homotecia.</p> <p>Congruencia y semejanza, incluido el concepto de razón de una homotecia.</p> <p>El círculo, centro y radio, área y circunferencia. Los términos “arco”, “sector circular”, “cuerda”, “tangente” y “segmento circular”.</p> <p>Perímetro y área de las figuras planas. Propiedades de los triángulos y los cuadriláteros, incluidos paralelogramos, rombos, rectángulos, cuadrados, cometas (trapezoides simétricos), trapecios; figuras combinadas.</p> <p>Volúmenes de prismas, pirámides, esferas, cilindros y conos.</p> |
| Geometría cartesiana | <p>Geometría elemental del plano, incluido el concepto de dimensión de punto, recta, plano y espacio. Ecuación de la recta en la forma $y = mx + c$.</p> <p>Rectas paralelas y perpendiculares, incluido $m_1 = m_2$ y $m_1 m_2 = -1$.</p> <p>Geometría de las figuras planas sencillas.</p> <p>El plano cartesiano; pares ordenados (x, y), origen, ejes.</p> <p>Punto medio de un segmento de recta y distancia entre dos puntos en el plano cartesiano y en tres dimensiones.</p> |
| Estadística y probabilidad | <p>Estadística descriptiva: recopilación de datos primarios, representación pictórica o gráfica incluidos gráficos de sectores, pictogramas, diagramas de tallos y hojas, gráficos de barras y gráficos de líneas.</p> <p>Obtención de datos estadísticos sencillos a partir de datos discretos y continuos, incluidos la media, la mediana, la moda, los cuartiles, el rango y el rango intercuartil.</p> <p>Cálculo de las probabilidades de sucesos simples.</p> |

Contenido del programa de estudios

Unidad 1: Álgebra

9 horas

El objetivo general de esta unidad consiste en introducir algunos conceptos y aplicaciones algebraicas elementales.

| Contenido | Información adicional | Vínculos |
|---|--|---|
| 1.1 Progresiones aritméticas y series aritméticas; suma finita de series aritméticas; progresiones geométricas y series geométricas; suma finita e infinita de series geométricas Notación de sumatoria Aplicaciones | <p>Se puede hacer uso de la tecnología para generar y obtener progresiones de diversas formas.</p> <p>Relacionar con las funciones exponenciales del apartado 2.6</p> <p>Ejemplos incluyen el interés compuesto y el crecimiento de poblaciones.</p> | <p>Dimensión internacional: la leyenda del ajedrez (Sissa ibn Dahir)</p> <p>Dimensión internacional: Aryabhata suele considerarse el “padre del álgebra”. Comparar con al-Khwarizmi.</p> <p>TdC: ¿cómo calculó Gauss la suma de enteros del 1 al 100? Discutir la idea de la intuición matemática como base para la demostración formal.</p> <p>TdC: debatir sobre la validez de la noción de “infinito”: los finitistas, como L. Kronecker, consideran que “un objeto matemático no existe a menos que pueda construirse a partir de los números naturales en un número finito de pasos”</p> <p>TdC: ¿qué es la paradoja de la dicotomía de Zenón? ¿Hasta qué punto los hechos matemáticos pueden estar alejados de la intuición?</p> |

| | Contenido | Información adicional | Vínculos |
|------------|---|--|---|
| 1.2 | <p>Estudio elemental de potencias y logaritmos</p> <p>Propiedades de las potencias; propiedades de los logaritmos</p> <p>Cambio de base</p> | <p>Ejemplos: $16^4 = 8$; $\frac{3}{4} = \log_4 8$; $\log 32 = 5 \log 2$; $(2^3)^{-4} = 2^{-12}$</p> <p>Ejemplos: $\log_4 7 = \frac{\ln 7}{\ln 4}$, $\log_{25} 125 = \frac{\log_5 125}{\log_5 25} \left(\frac{3}{2} \right)$</p> <p>Relacionar con las funciones logarítmicas del apartado 2.6</p> | <p>Aplicación: Química 18.1 (cálculo del pH)</p> <p>TdC: ¿son los logaritmos una invención o un descubrimiento? (Este tema ofrece una oportunidad para la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas.)</p> |
| 1.3 | <p>Teorema del binomio: desarrollo de $(a + b)^n$, $n \in \mathbb{N}$</p> <p>Cálculo de los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio usando el triángulo de Pascal y $\binom{n}{r}$</p> <p>No se requiere: Estudio formal de permutaciones ni la fórmula para ${}^n P_r$</p> | <p>Se pueden usar las reglas de conteo para el desarrollo del teorema.</p> <p>$\binom{n}{r}$ se debe hallar mediante el uso tanto de la fórmula como de la tecnología.</p> <p>Ejemplo: hallar $\binom{6}{r}$ introduciendo $y = 6^n C_r X$ y leyendo después los coeficientes de la tabla</p> <p>Relacionar con la distribución binomial del apartado 5.8</p> | <p>Objetivo general 8: el triángulo de Pascal. Atribución errónea del origen de un descubrimiento matemático.</p> <p>Dimensión internacional: el llamado “triángulo de Pascal” era conocido en China con anterioridad a Pascal.</p> |

Unidad 2: Funciones y ecuaciones

24 horas

Los objetivos generales de esta unidad consisten en estudiar el concepto de función como tema unificador de las matemáticas y aplicar las funciones como método para abordar distintas situaciones en matemáticas. Se espera que se haga un amplio uso de la tecnología tanto en el desarrollo de los temas de esta unidad como en sus aplicaciones, en lugar de elaborar técnicas analíticas. En los exámenes pueden aparecer preguntas en las que se pida la representación gráfica de funciones que no aparecen explícitamente en el programa de estudios, para lo que los alumnos deberán elegir la ventana de visualización adecuada. Para las funciones mencionadas explícitamente, también pueden aparecer preguntas sobre la composición de las mismas con funciones lineales $y = ax + b$.

| Contenido | Información adicional | Vínculos |
|---|---|--|
| 2.1 Concepto de función $f: x \mapsto f(x)$ Dominio, recorrido; imagen (valor) Composición de funciones Función identidad. Función inversa f^{-1} . No se requiere: Restricción del dominio | Ejemplo: para $x \mapsto \sqrt{2-x}$, el dominio es $x \leq 2$ y el recorrido es $y \geq 0$. Un gráfico ayuda a visualizar el recorrido. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$ En los exámenes solo se pedirá hallar las inversas de funciones inyectivas. | Dimensión internacional: el desarrollo de las funciones, Rene Descartes (Francia), Gottfried Wilhelm Leibniz (Alemania) y Leonhard Euler (Suiza) TdC: ¿es lo mismo “cero” que “nada”? TdC: ¿son las matemáticas un lenguaje formal? |

| | Contenido | Información adicional | Vínculos |
|-----|--|---|---|
| 2.2 | <p>Gráfico de una función, su ecuación $y = f(x)$</p> <p>Habilidades referidas a la representación gráfica de funciones</p> <p>Indagación de las características clave de los gráficos, como máximos y mínimos, puntos de corte con los ejes, asíntotas horizontales y verticales, simetrías y consideración de dominio y recorrido</p> <p>Uso de la tecnología para obtener el gráfico de una diversidad de funciones, incluidas las no específicamente mencionadas</p> <p>Gráfico de $y = f^{-1}(x)$ como simétrico respecto de la recta $y = x$ del gráfico de $y = f(x)$</p> | <p>Téngase en cuenta la diferencia entre los términos de instrucción “dibujar con precisión” y “dibujar aproximadamente”.</p> <p>También se espera que se aborde un enfoque analítico para las funciones sencillas, incluidas todas las que aparecen mencionadas en la unidad 2.</p> <p>Relacionar con los puntos máximos y mínimos locales del apartado 6.3</p> | <p>Aplicación: Química 11.3.1 (dibujar aproximadamente/esquematizar gráficos e interpretar el comportamiento descrito); destrezas geográficas</p> <p>TdC: ¿qué precisión tiene una representación visual de un concepto matemático? (Limitaciones de los gráficos para aportar información sobre las funciones y los fenómenos en general, pertinencia de los modos de representación.)</p> |

| | Contenido | Información adicional | Vínculos |
|------------|---|--|---|
| 2.3 | <p>Transformaciones de gráficos</p> <p>Traslaciones: $y = f(x) + b$; $y = f(x - a)$</p> <p>Simetrías (respecto a los dos ejes): $y = -f(x)$; $y = f(-x)$</p> <p>Estiramiento vertical de razón p: $y = pf(x)$</p> <p>Estiramiento en la dirección del eje x de razón $\frac{1}{q}$: $y = f(qx)$</p> <p>Transformaciones compuestas</p> | <p>Se debe hacer uso de la tecnología para investigar estas transformaciones.</p> <p>La traslación por el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ indica un desplazamiento horizontal de 3 unidades a la derecha y un desplazamiento vertical de 2 unidades hacia abajo.</p> <p>Ejemplo: $y = x^2$ utilizada para obtener $y = 3x^2 + 2$ mediante un estiramiento de razón 3 en la dirección del eje y, seguido de la traslación $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.</p> | <p>Aplicación: Economía 1.1 (desplazamiento de las curvas de oferta y demanda)</p> |
| 2.4 | <p>La función cuadrática $x \mapsto ax^2 + bx + c$, su gráfico, su intersección con el eje y, $(0, c)$. Eje de simetría.</p> <p>La forma $x \mapsto a(x - p)(x - q)$, intersecciones con el eje x $(p, 0)$ y $(q, 0)$</p> <p>La forma $x \mapsto a(x - h)^2 + k$, vértice (h, k)</p> | <p>Se espera que los alumnos sean capaces de cambiar de una forma a otra.</p> <p>Relacionar con las transformaciones del apartado 2.3 y las ecuaciones cuadráticas del apartado 2.7</p> | <p>Aplicación: Química 17.2 (ley de equilibrio)</p> <p>Aplicación: Física 2.1 (cinemática)</p> <p>Aplicación: Física 4.2 (movimiento armónico simple)</p> <p>Aplicación: Física 9.1 (solo NS) (movimiento de proyectiles)</p> |

| | Contenido | Información adicional | Vínculos |
|-----|--|--|---|
| 2.5 | <p>La función recíproca: $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \neq 0$: su gráfico y la propiedad de coincidir con su inversa</p> <p>La función racional $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ y su gráfico</p> <p>Asíntotas horizontales y verticales</p> | <p>Ejemplos: $h(x) = \frac{4}{3x-2}$, $x \neq \frac{2}{3}$; $y = \frac{x+7}{2x-5}$, $x \neq \frac{5}{2}$</p> <p>Los gráficos deben incluir todas las asíntotas y los puntos de corte con los ejes.</p> | |
| 2.6 | <p>Funciones exponenciales y sus gráficos: $x \mapsto a^x$, $a > 0$, $x \mapsto e^x$</p> <p>Funciones logarítmicas y sus gráficos: $x \mapsto \log_a x$, $x > 0$, $x \mapsto \ln x$, $x > 0$</p> <p>Relaciones entre las funciones: $a^x = e^{x \ln a}$; $\log_a a^x = x$; $a^{\log_a x} = x$, $x > 0$</p> | <p>Relacionar con las progresiones geométricas del apartado 1.1, las propiedades de las potencias y de los logaritmos del apartado 1.2, la función inversa del apartado 2.1, el gráfico de la función inversa del apartado 2.2, y los límites del apartado 6.1</p> | <p>Dimensión internacional: el método de la multiplicación de Babilonia: $ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$. Los Sulba Sutras en la antigua India y el manuscrito Bakhshali contenían una fórmula algebraica para resolver ecuaciones cuadráticas.</p> |

| Contenido | Información adicional | Vínculos |
|---|---|---|
| <p>2.7</p> <p>Resolución de ecuaciones, tanto de forma gráfica como analítica</p> <p>Uso de la tecnología para resolver una diversidad de ecuaciones, incluidas aquellas para las que no existe un enfoque analítico adecuado</p> <p>Resolución de $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$</p> <p>La fórmula de la solución de una ecuación cuadrática</p> <p>El discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ y la naturaleza de las raíces, es decir, dos raíces reales distintas, dos raíces reales iguales o ninguna raíz real</p> <p>Resolución de ecuaciones exponenciales</p> | <p>Las soluciones podrán denominarse tanto raíces de las ecuaciones como ceros de las funciones.</p> <p>Relacionar con las habilidades referidas a la representación gráfica de funciones del apartado 2.2 y las ecuaciones relacionadas con determinadas funciones de los apartados 2.3-2.6</p> <p>Ejemplos: $e^x = \sin x$, $x^4 + 5x - 6 = 0$</p> <p>Ejemplo: hallar k sabiendo que la ecuación $3kx^2 + 2x + k = 0$ tiene dos raíces reales iguales</p> <p>Ejemplos: $2^{x-1} = 10$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9^{x+1}$</p> <p>Relacionar con las potencias y los logaritmos del apartado 1.2</p> | <p>Aplicación: interés compuesto, crecimiento y decrecimiento; movimiento de proyectiles; distancia de frenada; circuitos eléctricos</p> <p>Aplicación: Física 7.2.7-7.2.9, 13.2.5, 13.2.6, 13.2.8 (desintegración y semivida radiactiva)</p> |
| <p>2.8</p> <p>Aplicaciones de las habilidades referidas a la representación gráfica de funciones y resolución de ecuaciones relacionadas con situaciones de la vida real</p> | <p>Relacionar con las series geométricas del apartado 1.1</p> | |

Unidad 3: Funciones circulares y trigonometría

16 horas

Los objetivos generales de esta unidad consisten en estudiar las funciones circulares y resolver problemas aplicando la trigonometría. En los exámenes se debe asumir que las medidas son en radianes, salvo que se indique lo contrario.

| | Contenido | Información adicional | Vínculos |
|-----|--|--|---|
| 3.1 | El círculo: medida de ángulos en radianes; longitud de un arco; área del sector circular | La medida en radianes puede expresarse como múltiplos enteros de π , o como números decimales. | <p>Dimensión internacional: el cálculo de Seki Takakazu para π hasta 10 cifras decimales</p> <p>Dimensión internacional: Hiparco, Menelao y Ptolomeo</p> <p>Dimensión internacional: ¿por qué una vuelta completa tiene 360 grados? Relacionar con las matemáticas de Babilonia.</p> <p>TdC: ¿cuál es la mejor unidad para medir los ángulos: grados o radianes? ¿Cuáles son los mejores criterios para decidirlo?</p> <p>TdC: los axiomas de Euclides, componentes básicos de la geometría euclídea. Relacionar con geometrías no euclídeas.</p> |

| | Contenido | Información adicional | Vínculos |
|------------|---|--|--|
| 3.2 | <p>Definición de $\cos \theta$ y $\sin \theta$ a partir del círculo de radio unidad</p> <p>Definición de $\tan \theta$ como $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$</p> <p>Valores exactos de las razones trigonométricas de $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ y sus múltiplos</p> | <p>La ecuación de una recta que pasa por el origen es $y = x \tan \theta$.</p> <p>Ejemplos:</p> $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \tan 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | <p>Objetivo general 8: ¿quién inventó en realidad el “teorema de Pitágoras”?</p> <p>Dimensión internacional: el primer trabajo que hace referencia explícita al seno como función de un ángulo es el <i>Aryabhata</i> de Aryabhata (año 510).</p> <p>TdC: la trigonometría fue desarrollada por sucesivas civilizaciones y culturas. ¿Cómo se considera el conocimiento matemático desde una perspectiva sociocultural?</p> |
| 3.3 | <p>Relación fundamental $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$</p> <p>Identidades del ángulo doble para el seno y el coseno</p> <p>Relación entre las razones trigonométricas</p> | <p>Se pueden utilizar diagramas geométricos sencillos o hacer uso de la tecnología para ilustrar las fórmulas del ángulo doble (y otras identidades trigonométricas).</p> <p>Ejemplos: dado el $\sin \theta$, hallar posibles valores de $\tan \theta$ sin necesidad de hallar θ</p> <p>Sabiendo que $\cos x = \frac{3}{4}$, y que x es un ángulo agudo, hallar $\sin 2x$ sin hallar x</p> | |

| | Contenido | Información adicional | Vínculos |
|-----|---|---|---|
| 3.4 | <p>Funciones trigonométricas (circulares) $\sin x$, $\cos x$ y $\tan \theta$: dominios y recorridos; amplitud; periodicidad; gráficos</p> <p>Funciones compuestas de la forma $f(x) = a \sin(b(x+c)) + d$</p> <p>Transformaciones</p> <p>Aplicaciones</p> | <p>Ejemplos: $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $f(x) = 2 \cos(3(x-4)) + 1$</p> <p>Ejemplo: $y = \sin x$ utilizada para obtener $y = 3 \sin 2x$ mediante un estiramiento de razón 3 en la dirección del eje y, seguido de un estiramiento de razón $\frac{1}{2}$ en la dirección del eje x</p> <p>Relacionar con las transformaciones de gráficos del apartado 2.3</p> <p>Ejemplos incluyen la altura de las mareas o el movimiento de la noria o rueda de la fortuna</p> | <p>Aplicación: Física 4.2 (movimiento armónico simple)</p> |

| | Contenido | Información adicional | Vínculos |
|-----|--|--|--|
| 3.5 | <p>Resolución de ecuaciones trigonométricas en un intervalo finito, tanto de forma gráfica como analítica</p> <p>Ecuaciones que llevan a ecuaciones cuadráticas en, por ejemplo, $\sin x$, $\cos x$ o $\tan \theta$</p> <p>No se requiere: La solución general de ecuaciones trigonométricas</p> | <p>Ejemplos: $2\sin x = 1$, $0 \leq x \leq 2\pi$, $2\sin 2x = 3\cos x$, $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$, $2\tan(3(x-4)) = 1$, $-\pi \leq x \leq 3\pi$</p> <p>Ejemplos: $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$ para $0 \leq x < 4\pi$, $2\sin x = \cos 2x$, $-\pi \leq x \leq \pi$</p> | |
| 3.6 | <p>Resolución de triángulos</p> <p>Teorema del coseno</p> <p>Teorema del seno, incluido el caso ambiguo</p> <p>Área del triángulo: $\frac{1}{2}ab \sin C$</p> <p>Aplicaciones</p> | <p>El teorema de Pitágoras como un caso particular del teorema del coseno</p> <p>Relacionar con el producto escalar del apartado 4.2, observando que: $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} ^2 = \mathbf{a} ^2 + \mathbf{b} ^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$</p> <p>Ejemplos pueden ser la navegación o problemas en dos y tres dimensiones, incluidos ángulos de elevación y depresión.</p> | <p>Objetivo general 8: atribución errónea del origen de un descubrimiento matemático</p> <p>Dimensión internacional: Teorema del coseno: Al-Kashi y Pitágoras</p> <p>TdC: geometrías no euclídeas: suma de ángulos mayores a 180° en un globo</p> |

Unidad 4: Vectores

16 horas

El objetivo general de esta unidad consiste en proporcionar una introducción básica a los vectores, incluidos enfoques tanto algebraicos como geométricos. El uso de programas informáticos de geometría dinámica es de gran utilidad para visualizar situaciones en tres dimensiones.

| Contenido | Información adicional | Vínculos |
|--|---|---|
| <p>4.1</p> <p>Los vectores como desplazamientos en el plano y en el espacio</p> <p>Componentes de un vector; representación en columna $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$</p> <p>Enfoques algebraico y geométrico de los siguientes temas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Suma y diferencia de dos vectores; el vector nulo, el vector $-\mathbf{v}$ • Multiplicación por un escalar, $k\mathbf{v}$; vectores paralelos • Módulo de un vector: \mathbf{v} • Vectores unitarios; la base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ • Vectores de posición $\vec{OA} = \mathbf{a}$ • $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ | <p>Relacionar con la geometría en tres dimensiones, ejes x, y, z</p> <p>Los componentes están referidos a los vectores unitarios $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, (la base canónica).</p> <p>Son fundamentales las aplicaciones a figuras geométricas sencillas.</p> <p>La diferencia de \mathbf{v} y \mathbf{w} es $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$.</p> <p>Las diagonales de un paralelogramo se pueden utilizar como ejemplos de sumas y diferencias de vectores.</p> <p>La multiplicación por un escalar se puede ilustrar mediante las homotecias.</p> <p>La distancia entre dos puntos A y B es el módulo de \vec{AB}.</p> | <p>Aplicación: Física 1.3.2 (suma y diferencia de vectores), Física 2.2.2, 2.2.3 (resultantes de vectores)</p> <p>TdC: ¿cómo relacionamos una teoría con su autor? ¿Quién desarrolló el análisis de vectores, J. W. Gibbs u O. Heaviside?</p> |

| | Contenido | Información adicional | Vínculos |
|-----|--|---|---|
| 4.2 | <p>Producto escalar de dos vectores</p> <p>Vectores perpendiculares; vectores paralelos</p> <p>Ángulo entre dos vectores</p> | <p>El producto escalar también se denomina "producto punto" o "producto interior".</p> <p>Relacionar con el teorema del coseno del apartado 3.6</p> <p>Para vectores no nulos, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ equivale a que los vectores son perpendiculares.</p> <p>Para vectores paralelos, $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \mathbf{w}$</p> | <p>Objetivo general 8: la teoría de vectores se utiliza para el seguimiento del desplazamiento de objetos, tanto con fines pacíficos como no pacíficos.</p> <p>TdC: ¿son el álgebra y la geometría dos campos del saber independientes? (El álgebra de vectores ofrece una buena oportunidad para la discusión sobre el modo en que las propiedades geométricas se describen y generalizan mediante métodos algebraicos.)</p> |
| 4.3 | <p>Ecuación vectorial de una recta en dos y tres dimensiones: $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$</p> <p>Ángulo entre dos rectas</p> | <p>Relevancia de \mathbf{a} (posición) y \mathbf{b} (dirección)</p> <p>Interpretación de t como tiempo y \mathbf{b} como velocidad, con \mathbf{b} representando la celeridad como escalar</p> | |
| 4.4 | <p>Distinción entre rectas coincidentes y paralelas</p> <p>Cálculo del punto de intersección entre dos rectas</p> <p>Determinación de la posición relativa de dos rectas</p> | | |

Unidad 5: Estadística y probabilidad

35 horas

El objetivo general de esta unidad consiste en introducir conceptos básicos. La mayoría de los cálculos requeridos se realizarán haciendo uso de la tecnología, pero las explicaciones de los cálculos hechos a mano pueden reforzar la comprensión. Se hará énfasis en la comprensión y la interpretación, en contexto, de los resultados obtenidos. Las tablas estadísticas ya no estarán permitidas en los exámenes. Aunque muchos de los cálculos requeridos en los exámenes son estimaciones, es posible que se utilicen los términos de instrucción “escriba”, “halle” y “calcule”.

| Contenido | Información adicional | Vínculos |
|--|---|--|
| <p>5.1</p> <p>Conceptos de población, muestra, muestra aleatoria, y datos discretos y continuos</p> <p>Presentación de los datos: distribuciones de frecuencia (tablas); histogramas de frecuencia con intervalos de clase de la misma amplitud</p> <p>Diagramas de caja y bigotes; valores no esperados</p> <p>Datos agrupados: uso de los valores centrales de los intervalos para los cálculos; amplitud del intervalo; límites superior e inferior de los intervalos; clase modal</p> <p>No se requiere:</p> <p>Histogramas de densidad de frecuencias</p> | <p>Datos continuos y discretos</p> <p>Un valor no esperado es aquél mayor a $1,5 \times \text{IQR}$ del cuartil más próximo.</p> <p>Se puede hacer uso de la tecnología para elaborar histogramas y diagramas de caja y bigotes.</p> | <p>Aplicación: Psicología (estadística descriptiva, muestra aleatoria; en diversas partes de la guía)</p> <p>Objetivo general 8: uso de la estadística para conducir a engaño</p> <p>Dimensión internacional: la paradoja de St. Petersburg, Chebychev, Pavlovsky</p> |

| | Contenido | Información adicional | Vínculos |
|------------|---|--|---|
| 5.2 | <p>Medidas estadísticas y su interpretación</p> <p>Medidas de posición central: media, mediana y moda</p> <p>Cuartiles y percentiles</p> <p>Dispersión: rango; rango intercuartil; varianza; desviación típica</p> <p>Efecto producido por constantes en los datos originales</p> | <p>En los exámenes, el conjunto de datos será considerado como la población.</p> <p>Cálculo de la media mediante la fórmula y haciendo uso de la tecnología. Los alumnos deben usar los valores centrales de los intervalos para estimar la media en datos agrupados.</p> <p>Cálculo de la desviación típica/varianza solo mediante la tecnología</p> <p>Relacionar con las transformaciones del apartado 2.3</p> <p>Ejemplos:</p> <p>Si se resta 5 al valor de cada uno de los datos, entonces la media queda disminuida en 5, pero la desviación típica no cambia.</p> <p>Si se dobla el valor de cada uno de los datos, la mediana se dobla, pero la varianza queda multiplicada por 4.</p> | <p>Aplicación: Psicología (estadística descriptiva; en diversas partes de la guía)</p> <p>Aplicación: los cálculos estadísticos para mostrar modelos y cambios; destrezas geográficas; gráficos estadísticos</p> <p>Aplicación: Biología 1.1.2 (cálculo de la media y la desviación típica); Biología 1.1.4 (comparar medias y dispersión de datos de dos o más muestras)</p> <p>Dimensión internacional: discusión de las distintas fórmulas para la varianza</p> <p>TdC: ¿expresan las distintas medidas de posición central distintas propiedades de los datos? ¿Son estas medidas una invención o un descubrimiento? ¿Se pueden elaborar en matemáticas fórmulas alternativas igualmente válidas? ¿Qué nos dice esto sobre las verdades matemáticas?</p> <p>TdC: ¿es fácil engañar con la estadística?</p> |
| 5.3 | <p>Aplicaciones</p> <p>Frecuencia acumulada; gráficos de la frecuencia acumulada; su uso para hallar la mediana, cuartiles y percentiles</p> | <p>Los valores de la mediana y los cuartiles obtenidos mediante la tecnología pueden ser distintos a los obtenidos a partir de un gráfico de frecuencias acumuladas.</p> | |

| | Contenido | Información adicional | Vínculos |
|-----|---|---|--|
| 5.4 | <p>Correlación lineal de variables bidimensionales</p> <p>Coefficiente de correlación momento-producto de Pearson, r</p> <p>Diagramas de dispersión; rectas de ajuste óptimo</p> <p>Ecuación de la recta de regresión de y sobre x</p> <p>Uso de la ecuación para realizar predicciones</p> <p>Interpretación matemática y de contexto</p> <p>No se requiere:</p> <p>El coeficiente de determinación R^2</p> | <p>Variable independiente x, variable dependiente y</p> <p>Se debe hacer uso de la tecnología para calcular r; sin embargo, los cálculos a mano de r pueden reforzar la comprensión.</p> <p>Positiva, cero, negativa; fuerte, débil, sin correlación</p> <p>La recta de ajuste óptimo pasa por la media.</p> <p>Se debe hacer uso de la tecnología para hallar la ecuación.</p> <p>Interpolación, extrapolación</p> | <p>Aplicación: Química 1.1.3.3 (curvas de ajuste óptimo)</p> <p>Aplicación: Geografía (destrezas geográficas)</p> <p>Medidas de correlación; destrezas geográficas</p> <p>Aplicación: Biología 1.1.6 (correlación no supone relación causal)</p> <p>TdC: ¿se puede predecir el valor de x a partir de y usando esta ecuación?</p> <p>TdC: ¿se pueden generar modelos para cualquier conjunto de datos mediante una función matemática (conocida)? Considerar la fiabilidad y validez de los modelos matemáticos para describir los fenómenos de la vida real.</p> |

| | Contenido | Información adicional | Vínculos |
|------------|---|---|--|
| 5.5 | <p>Conceptos de experimento, resultado, resultados equiprobables, espacio muestral (U) y suceso</p> <p>La probabilidad de un suceso A es $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$.</p> <p>Los sucesos complementarios A y A' (no A)</p> <p>Uso de diagramas de Venn, diagramas de árbol y tablas de resultados</p> | <p>El espacio muestral se puede representar mediante diagramas de diversas formas.</p> <p>Los experimentos con monedas, dados, juegos de cartas y otros, pueden contribuir a una mejor comprensión de la diferencia entre la frecuencia relativa (obtenida en un experimento) y la probabilidad (teórica).</p> <p>Se pueden hacer simulaciones para reforzar este tema.</p> <p>Relacionar con la frecuencia del apartado 5.1 y la frecuencia acumulada del apartado 5.3</p> | <p>TdC: ¿hasta qué punto las matemáticas ofrecen modelos de la vida real? ¿Existe siempre una función que ofrezca un modelo para el comportamiento de un conjunto de datos?</p> |
| 5.6 | <p>Sucesos compuestos, $P(A \cup B)$</p> <p>Sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes $P(A \cap B) = 0$</p> <p>Probabilidad condicionada; definición $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$</p> <p>Sucesos independientes; definición $P(A B) = P(A) = P(A B')$</p> <p>Probabilidades con y sin reposición</p> | <p>El “o” no exclusivo</p> <p>Los problemas se resuelven mejor, por lo general, con la ayuda de diagramas de Venn y diagramas de árbol sin el uso explícito de las fórmulas.</p> | <p>Objetivo general 8: el tema de los juegos de azar: uso de la probabilidad en los casinos. ¿Podrían y deberían las matemáticas ayudar a incrementar las ganancias en los juegos de azar?</p> <p>TdC: ¿son útiles las matemáticas para valorar los riesgos?</p> <p>TdC: ¿pueden considerarse los juegos de azar como una aplicación de las matemáticas? (Esto ofrece una buena oportunidad para debatir sobre la naturaleza, el papel y la ética de las aplicaciones matemáticas.)</p> |

| | Contenido | Información adicional | Vínculos |
|------------|---|--|---|
| 5.7 | <p>Concepto de variable aleatoria discreta y sus distribuciones de probabilidad</p> <p>Esperanza matemática (media), $E(X)$ para datos discretos</p> <p>Aplicaciones</p> | <p>Únicamente ejemplos sencillos, tales como:</p> $P(X = x) = \frac{1}{18}(4 + x) \text{ para } x \in \{1, 2, 3\};$ $P(X = x) = \frac{5}{18}, \frac{6}{18}, \frac{7}{18}$ <p>$E(X) = 0$ indica que se trata de un juego justo, donde X representa la ganancia de uno de los jugadores.</p> <p>Algunos ejemplos son los juegos de azar.</p> | |
| 5.8 | <p>Distribución binomial</p> <p>Media y varianza de una distribución binomial</p> <p>No se requiere:</p> <p>Demostración formal de la media y la varianza</p> | <p>Relacionar con el teorema del binomio del apartado 1.3</p> <p>Condiciones bajo las cuales las variables aleatorias tienen esta distribución</p> <p>Por lo general, el uso de la tecnología es el mejor modo de calcular las probabilidades en la distribución binomial.</p> | |
| 5.9 | <p>Distribuciones normales y curvas normales</p> <p>Tipificación o estandarización de la variable en una distribución normal (valores z, puntuaciones z)</p> <p>Propiedades de la distribución normal</p> | <p>Las probabilidades y valores de la variable se deben hallar haciendo uso de la tecnología.</p> <p>Relacionar con las transformaciones del apartado 2.3</p> <p>La variable tipificada (z) da el número de unidades de desviación típica que dista de la media.</p> | <p>Aplicación: Biología 1.1.3 (enlaces a la distribución normal)</p> <p>Aplicación: Psicología (estadística descriptiva; en diversas partes de la guía)</p> |

Unidad 6: Análisis

40 horas

El objetivo general de esta unidad consiste en introducir conceptos y técnicas elementales del cálculo diferencial e integral y sus aplicaciones.

| Contenido | Información adicional | Vínculos |
|---|---|--|
| <p>6.1</p> <p>Idea informal de límite y convergencia</p> <p>Notación de límite</p> <p>Definición de derivada, a partir del concepto, como $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$</p> | <p>Ejemplo: 0,3; 0,33; 0,333; ... converge a $\frac{1}{3}$.</p> <p>Se debe hacer uso de la tecnología para explorar el concepto de límite, de forma numérica y gráfica.</p> <p>Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{x-1} \right)$</p> <p>Relacionar con las series geométricas infinitas del apartado 1.1, y las funciones racionales y exponenciales, y asíntotas de los apartados 2.5-2.7</p> <p>Uso de esta definición únicamente para hallar las derivadas de las funciones polinómicas sencillas</p> <p>Mediante el uso de la tecnología se pueden ilustrar otras derivadas.</p> <p>Relacionar con el teorema del binomio del apartado 1.3</p> <p>Uso de las dos formas de notación, $\frac{dy}{dx}$ y $f'(x)$, para la derivada primera</p> | <p>Aplicación: Economía 1.5 (costo marginal, ingreso marginal, beneficio marginal)</p> <p>Aplicación: Química 11.3.4 (interpretación de la pendiente de una curva)</p> <p>Objetivo general 8: debate sobre si fue Newton o Leibnitz quien descubrió ciertos conceptos del cálculo</p> <p>TdC: ¿qué valor tiene el conocimiento de límites? ¿Es aplicable a la vida real el comportamiento infinitesimal?</p> <p>TdC: se pueden abordar oportunidades para discutir la formación y validación de hipótesis, y después la demostración formal, comparando ciertos casos, mediante un enfoque de investigación.</p> <p>(continúa en la página siguiente)</p> |

| Contenido | Información adicional | Vínculos |
|--|---|----------------------------------|
| <p>Interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva y como medida de la razón de cambio entre dos variables</p> <p>Tangentes, normales y sus ecuaciones</p> <p>No se requiere: Métodos analíticos para el cálculo de límites</p> | <p>Identificación de los intervalos en los que las funciones son crecientes o decrecientes</p> <p>Uso de los dos enfoques, analítico y mediante la tecnología</p> <p>Se puede hacer uso de la tecnología para explorar los gráficos y sus derivadas.</p> | (proviene de la página anterior) |
| <p>6.2</p> <p>Derivada de: x^n ($n \in \mathbb{Q}$), $\sen x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x y $\ln x$</p> <p>Derivada de la suma y del producto por un escalar de estas funciones</p> <p>Regla de la cadena para la composición de funciones</p> <p>Regla del producto y del cociente</p> <p>Derivada segunda</p> <p>Extensión a derivadas de orden mayor</p> | <p>Relacionar con la composición de funciones del apartado 2.1</p> <p>Se puede hacer uso de la tecnología para investigar la regla de la cadena.</p> <p>Uso de las dos formas de notación, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ y $f''(x)$</p> <p>$\frac{d^n y}{dx^n}$ y $f^{(n)}(x)$</p> | |

| | Contenido | Información adicional | Vínculos |
|------------|---|--|--|
| 6.3 | <p>Puntos máximos y mínimos locales</p> <p>Comprobación de máximos y mínimos</p> | <p>Mediante el cambio de signo de la derivada primera y mediante el signo de la derivada segunda</p> <p>Uso de los términos “cóncava hacia arriba” para $f''(x) > 0$ y “cóncava hacia abajo” para $f''(x) < 0$</p> <p>En un punto de inflexión, $f''(x) = 0$ y cambia el signo (cambia la concavidad).</p> <p>$f''(x) = 0$ no es una condición suficiente para que exista un punto de inflexión: por ejemplo, $y = x^4$ en $(0, 0)$.</p> | <p>Aplicación: beneficios, áreas, volúmenes</p> |
| | <p>Puntos de inflexión con pendiente nula y no nula</p> <p>Comportamiento de los gráficos de las funciones, incluida la relación entre los gráficos de f, f' y f''</p> <p>Optimización</p> | <p>Tanto comportamientos “globales” (para un amplio x) como “locales”</p> <p>Mediante la tecnología se puede obtener el gráfico de una derivada sin hallar explícitamente una expresión para la misma.</p> <p>Uso de la comprobación de la derivada primera o segunda para justificar la existencia de valores máximos o mínimos</p> <p>Ejemplos incluyen beneficios, áreas y volúmenes.</p> <p>Relacionar con la representación gráfica de funciones del apartado 2.2</p> | |
| | <p>Aplicaciones</p> <p>No se requiere:</p> <p>Puntos de inflexión donde $f''(x)$ no está definida: por ejemplo, $y = x^{1/3}$ en $(0, 0)$</p> | | |

| | Contenido | Información adicional | Vínculos |
|-----|---|---|----------|
| 6.4 | <p>La integral indefinida como primitiva (antiderivada) de una función</p> <p>Integral indefinida de x^n ($n \in \mathbb{Q}$), $\text{sen } x$, $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{1}{x}$ y e^x</p> <p>Funciones compuestas de las anteriores con la función lineal $ax + b$</p> <p>Integración por comparación o sustitución en la expresión $\int f(g(x))g'(x)dx$</p> | $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \quad x > 0$ <p>Ejemplo:</p> $f''(x) = \cos(2x + 3) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + 3) + C$ <p>Ejemplos:</p> $\int 2x(x^2 + 1)dx, \quad \int x \text{sen } x^2 dx, \quad \int \frac{\text{sen } x}{\cos x} dx$ | |

| Contenido | Información adicional | Vínculos |
|--|---|---|
| <p>6.5</p> <p>Integración con una restricción para determinar el término constante</p> <p>Integrales definidas, tanto de forma analítica como haciendo uso de la tecnología</p> <p>Cálculo de áreas bajo curvas (entre la curva y el eje x)</p> <p>Cálculo de áreas entre curvas</p> <p>Volúmenes de revolución alrededor del eje x</p> | <p>Ejemplo: si $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + x$ e $y = 10$ cuando $x = 0$, entonces $y = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 10$</p> <p>$\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a)$</p> <p>El valor de algunas integrales definidas solo se puede hallar mediante el uso de la tecnología.</p> <p>Los alumnos deben escribir primero una expresión correcta antes de calcular el área.</p> <p>Se puede hacer uso de la tecnología para reforzar la comprensión de áreas y volúmenes.</p> | <p>Dimensión internacional: cálculo correcto del volumen de un tronco de pirámide por los antiguos egipcios (el papiro de Moscú, documento matemático del antiguo Egipto)</p> <p>Uso de los infinitesimales por los griegos</p> <p>Cálculo preciso del volumen de un cilindro por el matemático chino Liu Hui</p> <p>Dimensión internacional: Ibn Al Haytham, primer matemático en calcular la integral de una función, con el objeto de hallar el volumen de un paraboloides</p> |
| <p>6.6</p> <p>Problemas de cinemática relativos al desplazamiento s, la velocidad v, y la aceleración a</p> <p>Distancia total recorrida</p> | <p>$v = \frac{ds}{dt}$; $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$</p> <p>Distancia total recorrida $= \int_t^{t_2} v dt$</p> | <p>Aplicación: Física 2.1 (cinemática)</p> |

La evaluación en el Programa del Diploma

Información general

La evaluación es una parte fundamental de la enseñanza y el aprendizaje. Los objetivos más importantes de la evaluación en el Programa del Diploma son los de apoyar los objetivos del currículo y fomentar un aprendizaje adecuado por parte de los alumnos. En el Programa del Diploma, la evaluación es tanto interna como externa. Los trabajos preparados para la evaluación externa son corregidos por examinadores del IB, mientras que los trabajos presentados para la evaluación interna son corregidos por los profesores y moderados externamente por el IB.

El IB reconoce dos tipos de evaluación:

- La evaluación formativa orienta la enseñanza y el aprendizaje. Proporciona a los alumnos y profesores información útil y precisa sobre el tipo de aprendizaje que se está produciendo y sobre los puntos fuertes y débiles de los alumnos, lo que permite ayudarles a desarrollar sus conocimientos y aptitudes. La evaluación formativa también ayuda a mejorar la calidad de la enseñanza, pues proporciona información que permite hacer un seguimiento de la medida en que se alcanzan los objetivos generales y los objetivos de evaluación del curso.
- La evaluación sumativa ofrece una impresión general del aprendizaje que se ha producido hasta un momento dado y se emplea para determinar los logros de los alumnos.

En el Programa del Diploma se utiliza principalmente una evaluación sumativa concebida para identificar los logros de los alumnos al final del curso o hacia el final del mismo. Sin embargo, muchos de los instrumentos de evaluación se pueden utilizar también con propósitos formativos durante el curso de la enseñanza y el aprendizaje, y se anima a los profesores a que los utilicen de este modo. Un plan de evaluación exhaustivo debe ser una parte fundamental de la enseñanza, el aprendizaje y la organización del curso. Para más información, consulte el documento *Normas para la implementación de los programas y aplicaciones concretas*.

La evaluación en el IB se basa en criterios establecidos; es decir, se evalúa el trabajo de los alumnos en relación con niveles de logro determinados y no en relación con el trabajo de otros alumnos. Para más información sobre la evaluación en el Programa del Diploma, consulte la publicación titulada *Principios y práctica del sistema de evaluación del Programa del Diploma*.

Para ayudar a los profesores en la planificación, implementación y evaluación de los cursos del Programa del Diploma, hay una variedad de recursos que se pueden consultar en el CPEL o adquirir en la tienda virtual del IB (<http://store.ibo.org>). En el CPEL pueden encontrar materiales de ayuda al profesor, informes de la asignatura, información adicional sobre la evaluación interna y descriptores de las calificaciones finales, así como materiales aportados por otros docentes. En la tienda virtual del IB se pueden adquirir exámenes de muestra, exámenes de convocatorias pasadas y esquemas de calificación.

Métodos de evaluación

El IB emplea diversos métodos para evaluar el trabajo de los alumnos.

Criterios de evaluación

Cuando la tarea de evaluación es abierta (es decir, se plantea de tal manera que fomenta una variedad de respuestas), se utilizan criterios de evaluación. Cada criterio se concentra en una habilidad específica que se espera que demuestren los alumnos. Los objetivos de evaluación describen lo que los alumnos deben ser capaces de hacer y los criterios de evaluación describen qué nivel deben demostrar al hacerlo. Los criterios de evaluación permiten evaluar del mismo modo respuestas muy diferentes. Cada criterio está compuesto por una serie de descriptores de nivel ordenados jerárquicamente. Cada descriptor de nivel equivale a uno o varios puntos. Se aplica cada criterio de evaluación por separado, y se localiza el descriptor que refleja más adecuadamente el nivel conseguido por el alumno. Distintos criterios de evaluación pueden tener puntuaciones máximas diferentes en función de su importancia. Los puntos obtenidos en cada criterio se suman, dando como resultado la puntuación total para el trabajo en cuestión.

Bandas de calificación

Las bandas de calificación describen de forma integradora el desempeño esperado y se utilizan para evaluar las respuestas de los alumnos. Constituyen un único criterio holístico, dividido en descriptores de nivel. A cada descriptor de nivel le corresponde un rango de puntos, lo que permite diferenciar el desempeño de los alumnos. Del rango de puntos de cada descriptor de nivel, se elige la puntuación que mejor corresponda al nivel logrado por el alumno.

Esquemas de calificación

Este término general se utiliza para describir los baremos analíticos que se crean para pruebas de examen específicas. Se preparan para aquellas preguntas de examen que se espera que los alumnos contesten con un tipo concreto de respuesta o una respuesta final determinada. Indican a los examinadores cómo desglosar la puntuación total disponible para cada pregunta con respecto a las diferentes partes de esta. Los esquemas de calificación pueden indicar el contenido que se espera que tengan las respuestas, o pueden consistir en una serie de aclaraciones sobre cómo deben aplicarse los criterios de evaluación en la corrección.

Resumen de la evaluación

Primeros exámenes: 2014

| Componente de evaluación | Porcentaje de la evaluación |
|---|--|
| Evaluación externa (3 horas) Prueba 1 (1 hora 30 minutos) No se permite el uso de calculadoras. (90 puntos) Sección A La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con todo el programa de estudios. Sección B La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con todo el programa de estudios. Prueba 2 (1 hora 30 minutos) Se requiere el uso de calculadoras de pantalla gráfica. (90 puntos) Sección A La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con todo el programa de estudios. Sección B La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con todo el programa de estudios. | 80% 40% 40% |
| Evaluación interna Este componente lo evalúa internamente el profesor y lo modera externamente el IB al final del curso. Exploración matemática La evaluación interna en Matemáticas NM es una exploración individual. Consiste en un trabajo escrito basado en la investigación de un área de las matemáticas. (20 puntos) | 20% |

Evaluación externa

Información general

Los esquemas de calificación se utilizan para evaluar a los alumnos en ambas pruebas y son específicos para cada prueba de examen.

Descripción detallada de la evaluación externa

Prueba 1 y prueba 2

Estas pruebas las establece y evalúa el IB. En total, representan el 80% de la nota final del curso. Están diseñadas para que los alumnos puedan demostrar lo que saben y son capaces de hacer.

Calculadoras

Prueba 1

No se permite a los alumnos disponer de ninguna calculadora. En las preguntas se les pedirá principalmente que adopten un enfoque analítico para llegar a las soluciones, en lugar de que usen calculadoras de pantalla gráfica. La prueba no requerirá cálculos complicados que puedan llevar a cometer errores por descuido. No obstante, las preguntas implicarán realizar operaciones aritméticas cuando estas sean esenciales para su desarrollo.

Prueba 2

Los alumnos deben disponer de una calculadora de pantalla gráfica en todo momento. No obstante, no todas las preguntas requerirán necesariamente el uso de calculadoras de pantalla gráfica. En el *Manual de procedimientos del Programa del Diploma* se proporciona información sobre los tipos de calculadoras de pantalla gráfica permitidos.

Cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NM

Es necesario que cada alumno disponga de un ejemplar sin anotaciones del cuadernillo de fórmulas durante el examen. El colegio será el encargado de descargarlo desde IBIS o el CPEL, y asegurarse de contar con un número suficiente de copias disponibles para todos los alumnos.

Asignación de notas

Se asignan puntos por método, precisión, respuestas correctas y razonamiento, lo cual incluye interpretación.

En las pruebas 1 y 2, las respuestas correctas que no presentan por escrito el procedimiento realizado no siempre reciben la puntuación máxima. Las respuestas se deben justificar mediante el procedimiento seguido o las explicaciones correspondientes (por ejemplo, en forma de diagramas, gráficos o cálculos). Aun cuando una respuesta sea incorrecta, se pueden otorgar algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y este sea correcto. Por lo tanto, se debe recomendar a los alumnos que muestren todos los procedimientos utilizados.

Prueba 1

Duración: 1 hora 30 minutos

Porcentaje del total de la evaluación: 40%

- Esta prueba consta de una sección A con preguntas de respuesta corta y una sección B con preguntas de respuesta larga.
- No se permite a los alumnos disponer de ninguna calculadora en esta prueba.

Parte del programa de estudios que cubre la prueba

- Para esta prueba se requiere el conocimiento de **todas** las unidades. Sin embargo, esto no significa que todas las unidades se vayan a evaluar en cada convocatoria de examen.

Puntuación

- Esta prueba se califica con un máximo de **90** puntos y representa el **40%** de la nota final.
- Las preguntas de esta prueba varían en cuanto a su extensión y nivel de dificultad. Así pues, cada una de ellas no necesariamente se califica con la misma puntuación. La puntuación máxima de cada pregunta se indica al principio de la misma.

Sección A

Esta sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con todo el programa de estudios. Se asignan aproximadamente 45 puntos.

La finalidad de esta sección es comprobar la amplitud de los conocimientos y comprensión de los alumnos sobre las unidades del programa de estudios. No obstante, no se debe suponer que se vaya a dar la misma importancia a todas las unidades.

Tipo de preguntas

- Para resolver cada pregunta será necesario un pequeño número de pasos.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.

Sección B

Esta sección consta de un pequeño número de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con todo el programa de estudios. Se asignan aproximadamente 45 puntos. Una misma pregunta puede implicar conocimientos de más de una unidad.

La finalidad de esta sección es comprobar la profundidad de los conocimientos y la comprensión de los alumnos sobre las unidades del programa de estudios. Esta sección puede abarcar menos unidades del programa de estudios que la sección A.

Tipo de preguntas

- Las preguntas requieren respuestas largas que implican razonamientos sólidos.
- Cada pregunta desarrolla un único tema.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.
- En general, cada pregunta presenta una escala de dificultad que va de cuestiones relativamente fáciles al principio, a otras relativamente difíciles al final. Se pone especial énfasis en la resolución de problemas.

Prueba 2

Duración: 1 hora 30 minutos

Porcentaje del total de la evaluación: 40%

Esta prueba consta de una sección A con preguntas de respuesta corta y una sección B con preguntas de respuesta larga. Para esta prueba se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no todas las preguntas requerirán necesariamente su uso.

Parte del programa de estudios que cubre la prueba

- Para esta prueba se requiere el conocimiento de **todas** las unidades. Sin embargo, esto no significa que todas las unidades se vayan a evaluar en cada convocatoria de examen.

Puntuación

- Esta prueba se califica con un máximo de **90** puntos y representa el **40%** de la nota final.
- Las preguntas de esta prueba varían en cuanto a su extensión y nivel de dificultad. Así pues, cada una de ellas no necesariamente se califica con la misma puntuación. La puntuación máxima de cada pregunta se indica al principio de la misma.

Sección A

Esta sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con todo el programa de estudios. Se asignan aproximadamente 45 puntos.

La finalidad de esta sección es comprobar la amplitud de los conocimientos y comprensión de los alumnos sobre las unidades del programa de estudios. No obstante, no se debe suponer que se vaya a dar la misma importancia a todas las unidades.

Tipo de preguntas

- Para resolver cada pregunta será necesario un pequeño número de pasos.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.

Sección B

Esta sección consta de un pequeño número de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con todo el programa de estudios. Se asignan aproximadamente 45 puntos. Una misma pregunta puede implicar conocimientos de más de una unidad.

La finalidad de esta sección es comprobar la profundidad de los conocimientos y la comprensión de los alumnos sobre las unidades del programa de estudios. Esta sección puede abarcar menos unidades del programa de estudios que la sección A.

Tipo de preguntas

- Las preguntas requieren respuestas largas que implican razonamientos sólidos.
- Cada pregunta desarrolla un único tema.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.
- En general, cada pregunta presenta una escala de dificultad que va de cuestiones relativamente fáciles al principio, a otras relativamente difíciles al final. Se pone especial énfasis en la resolución de problemas.

Evaluación interna

Propósito de la evaluación interna

La evaluación interna es una parte fundamental del curso y es obligatoria para todos los alumnos. Les permite a los alumnos demostrar la aplicación de sus habilidades y conocimientos y dedicarse a aquellas áreas que despierten su interés sin las restricciones de tiempo y de otros tipos asociadas a los exámenes escritos. La exploración debe, en la medida de lo posible, integrarse en la enseñanza normal en clase, y no ser una actividad aparte que tiene lugar una vez que se han impartido todos los contenidos del curso.

La evaluación interna en Matemáticas NM es una exploración individual. Consiste en un trabajo escrito basado en la investigación de un área de las matemáticas, y se corrige de acuerdo con cinco criterios de evaluación.

Orientación y autoría original

La exploración presentada para la evaluación interna debe ser trabajo original del alumno. Sin embargo, no se pretende que los alumnos decidan el título o el tema de su exploración y que se les deje trabajar sin ningún tipo de apoyo por parte del profesor. El profesor debe desempeñar un papel importante en las etapas de planificación y desarrollo de la exploración. Es responsabilidad del profesor asegurarse de que los alumnos estén familiarizados con:

- Los requisitos del tipo de trabajo que se va a evaluar internamente
- La política de probidad académica del IB, disponible en el CPEL
- Los criterios de evaluación (los alumnos deben entender que el trabajo que presenten para evaluación debe abordar eficazmente estos criterios)

Los profesores y los alumnos deben discutir la exploración. Se debe animar a los alumnos a dirigirse al profesor en busca de consejos e información, y no se les debe penalizar por solicitar orientación. Sin embargo, si un alumno no fuera capaz de completar la exploración sin considerable ayuda del profesor, esto deberá anotarse en el formulario correspondiente del *Manual de procedimientos del Programa del Diploma*.

Los profesores tienen la responsabilidad de asegurarse de que todos los alumnos entiendan el significado y la importancia de los conceptos relacionados con la probidad académica, especialmente los de autoría original y propiedad intelectual. Los profesores deben verificar que todos los trabajos que los alumnos entreguen para evaluación hayan sido preparados conforme a los requisitos, y deben explicar claramente a los alumnos que la exploración debe ser original en su totalidad.

Como parte del proceso de aprendizaje, los profesores pueden aconsejar a los alumnos sobre el **primer borrador** de la exploración. El profesor podrá sugerir maneras de mejorarlo, pero sin llegar a corregirlo o editarlo excesivamente. La próxima versión que se entregue al profesor después del primer borrador será considerada la versión final.

Los profesores deben verificar la autoría original de todo trabajo que se envíe al IB para su moderación o evaluación, y no deben enviar ningún trabajo que constituya (o sospechen que constituya) un caso de conducta impropia. Cada alumno debe firmar una portada de la evaluación interna para confirmar que el trabajo que presenta para la evaluación es original y que es la versión final del mismo. Una vez que el alumno haya entregado oficialmente la versión final de su trabajo junto con la portada firmada al profesor (o al coordinador) para la evaluación interna, no podrá pedir que se la devuelvan para modificarla.

La autoría de los trabajos se puede comprobar debatiendo su contenido con el alumno y analizando con detalle uno o más de los aspectos siguientes:

- La propuesta inicial del alumno
- El primer borrador del trabajo escrito
- Las referencias bibliográficas citadas
- El estilo de redacción, comparado con trabajos que se sabe que ha realizado el alumno

El requisito de firmar, tanto el alumno como el profesor, la portada de la evaluación interna se aplica al trabajo de todos los alumnos, no solo al de aquellos que formen parte de la muestra que se enviará al examinador para moderación. Si el profesor y el alumno firman la portada, pero esta incluye algún comentario que indique que el trabajo pudiera no ser original, el alumno no recibirá nota alguna en ese componente y, por tanto, no podrá obtener una calificación final para la asignatura. Para más información, consulte la publicación del IB titulada *Probidad académica* y los artículos pertinentes del *Reglamento general del Programa del Diploma*.

No se permite presentar un mismo trabajo para la evaluación interna y la Monografía.

Trabajo en grupo

Se debe descartar el trabajo en grupo para la exploración. Cada exploración ha de ser un trabajo individual.

Se debe aclarar a los alumnos que todo el trabajo relacionado con la exploración, incluida su redacción, ha de ser personal. Es, por tanto, conveniente que los profesores intenten fomentar entre los alumnos un sentido de la responsabilidad respecto de su aprendizaje, de manera que perciban su trabajo como algo propio de lo que se sientan orgullosos.

Temporalización

La evaluación interna es una parte fundamental del curso de Matemáticas NM y representa un 20% de la evaluación final del curso. Este porcentaje debe verse reflejado en el tiempo que se dedica a enseñar los conocimientos y las habilidades necesarios para llevar a cabo el trabajo de evaluación interna, así como en el tiempo total dedicado a realizar el trabajo.

Se espera que se asigne un total de aproximadamente 10 horas lectivas al trabajo. En estas horas se deberá incluir:

- El tiempo que necesita el profesor para explicar a los alumnos los requisitos de la exploración
- Tiempo de clase para que los alumnos trabajen en la exploración
- Tiempo para consultas entre el profesor y cada alumno
- Tiempo para revisar el trabajo y evaluar cómo progresa, y para comprobar que es original

Uso de los criterios de evaluación en la evaluación interna

Para la evaluación interna, se ha establecido una serie de criterios de evaluación. Cada criterio cuenta con cierto número de descriptores; cada uno describe un nivel de logro específico y equivale a un determinado rango de puntos. Los descriptores se centran en aspectos positivos aunque, en los niveles más bajos, la descripción puede mencionar la falta de logros.

Los profesores deben valorar los trabajos de evaluación interna con relación a los criterios, utilizando los descriptores de nivel.

- El propósito es encontrar, para cada criterio, el descriptor que exprese de la forma más adecuada el nivel de logro alcanzado por el alumno.
- Al evaluar el trabajo de un alumno, los profesores deben leer los descriptores de cada criterio, empezando por el nivel 0 y hasta llegar al descriptor que describa un nivel de logro que el alumno no haya alcanzado. El nivel que alcance el alumno será, por tanto, el inmediatamente anterior, y es el que se deberá asignar.
- Solamente deben utilizarse números enteros y no notas parciales, como fracciones o decimales.
- Los profesores no deben pensar en términos de aprobado o no aprobado, sino que deben concentrarse en identificar el descriptor apropiado para cada criterio de evaluación.
- Los descriptores de nivel más altos no implican un trabajo perfecto y pueden ser alcanzados por los alumnos. Los profesores no deben dudar en conceder los niveles extremos si corresponden a descriptores apropiados del trabajo que se está evaluando.
- Un alumno que alcance un nivel de logro alto en un criterio no necesariamente alcanzará niveles altos en los demás criterios. Igualmente, un alumno que alcance un nivel de logro bajo en un criterio no necesariamente alcanzará niveles bajos en los demás criterios. Los profesores no deben suponer que la evaluación general de los alumnos haya de dar como resultado una distribución determinada de puntuaciones.
- Se espera que los alumnos tengan acceso a los criterios de evaluación.

Descripción detallada de la evaluación interna

Exploración matemática

Duración: 10 horas lectivas

Porcentaje del total de la evaluación: 20%

Introducción

El componente de la evaluación interna en este curso es una exploración matemática. Consiste en un breve informe escrito por el alumno, basado en un tema elegido por este, y que debe centrarse en las matemáticas de esa área determinada. Se hace hincapié en la comunicación matemática (incluidos diagramas, fórmulas, gráficos, etc.) acompañada de comentarios, una buena redacción matemática y reflexiones serias. El alumno debe desarrollar su propio enfoque, y el profesor debe proporcionar comentarios sobre el trabajo a través de, por ejemplo, debates y entrevistas. De este modo, los alumnos pueden desarrollar un área de su interés sin las limitaciones de tiempo de los exámenes, y experimentar una sensación de éxito.

El informe final debe tener una extensión aproximada de entre 6 y 12 páginas. Puede estar escrito a mano o con procesador de textos. Los alumnos han de ser capaces de explicar todas las etapas de su trabajo de manera que demuestren una comprensión clara. Aunque no se pretende que los alumnos hagan una presentación de su trabajo en clase, este ha de estar escrito de modo que sus compañeros puedan seguirlo con relativa facilidad. El informe debe incluir una bibliografía detallada, y es necesario que se incluyan referencias a las fuentes según la política de probidad académica del IB. Las citas textuales deben mencionar la fuente.

Propósito de la exploración

Los objetivos generales de Matemáticas NM se logran a través de los objetivos de evaluación que se evalúan formalmente como parte del curso, sea en los exámenes escritos, en la exploración, o en ambos. Se pretende que la exploración, además de evaluar los objetivos de evaluación del curso, proporcione a los alumnos oportunidades para aumentar su comprensión de los conceptos y procesos matemáticos, y para desarrollar una noción más amplia de las matemáticas. Esto se recoge en los objetivos generales del curso, en concreto los

objetivos que van del 6 al 9 (**aplicaciones, tecnología, implicaciones morales, sociales y éticas, y dimensión internacional**). Se espera que, realizando la exploración, los alumnos saquen provecho de las actividades matemáticas implicadas, y que estas les resulten motivadoras y gratificantes. Ello permitirá el desarrollo de los atributos del perfil de la comunidad de aprendizaje del IB por parte de los alumnos.

Con la exploración se pretende:

- Que los alumnos desarrollen una perspectiva propia acerca de la naturaleza de las matemáticas, así como la capacidad para plantearse sus propias preguntas sobre la disciplina
- Proporcionar a los alumnos oportunidades para realizar un trabajo matemático durante un período prolongado de tiempo
- Que los alumnos puedan experimentar la satisfacción de aplicar procesos matemáticos de forma independiente
- Proporcionar a los alumnos oportunidades de experimentar la belleza, las posibilidades y la utilidad de las matemáticas
- Motivar a los alumnos, cuando proceda, a descubrir, utilizar y apreciar el poder de la tecnología como herramienta matemática
- Que los alumnos sean capaces de desarrollar cualidades tales como la paciencia y la perseverancia, así como de reflexionar sobre el significado de los resultados que obtienen
- Proporcionar a los alumnos oportunidades para exponer con confianza el alcance de su evolución en matemáticas

Organización y desarrollo de la exploración

El trabajo relacionado con la exploración debe realizarse como parte del curso, de modo que los alumnos tengan la oportunidad de adquirir las destrezas necesarias. Las horas lectivas dedicadas a la exploración pueden, por tanto, utilizarse para realizar discusiones generales sobre temas de estudio, así como para que los alumnos se familiaricen con los criterios.

En el material de ayuda al profesor se incluye más información sobre el desarrollo de la exploración.

Requisitos y recomendaciones

Los alumnos pueden elegir entre una amplia variedad de actividades, por ejemplo, utilización de modelos, investigaciones y aplicaciones de las matemáticas. Para ayudar a profesores y alumnos en la elección del tema, en el material de ayuda al profesor hay disponible una lista de sugerencias. Sin embargo, los alumnos no están limitados a elegir una opción de esta lista.

En general, la exploración no debe exceder las 12 páginas, incluidos los diagramas y los gráficos, pero sin contar la bibliografía. No obstante, lo importante es la calidad del trabajo matemático, y no la extensión.

El profesor ha de ofrecer una orientación adecuada en cada una de las etapas de la exploración como, por ejemplo, dirigir a los alumnos hacia líneas de investigación más fructíferas, hacer sugerencias sobre fuentes de información apropiadas, y dar consejos sobre el contenido y la claridad de la exploración en su fase de redacción.

Los profesores deben advertir a los alumnos sobre la existencia de errores, pero sin corregirlos de manera explícita. Es necesario insistir en que los alumnos deben asesorarse con el profesor a lo largo de todo el proceso.

Todos los alumnos han de estar familiarizados con los requisitos y con los criterios de evaluación de la exploración. Los alumnos han de comenzar a planificar sus exploraciones lo más pronto posible una vez comenzado el curso. Los plazos de entrega se deben establecer de modo estricto. Debe fijarse una fecha para la entrega del tema de la exploración y una breve descripción de la misma, otra para la entrega del primer borrador y, por supuesto, la fecha para la finalización de la exploración.

Para desarrollar las exploraciones, los alumnos deben tratar de hacer uso de los conocimientos matemáticos adquiridos durante el curso. El nivel de complejidad debe ser acorde con el del curso, es decir, debe ser similar al establecido en el programa del curso. No se espera que los alumnos elaboren un trabajo sobre temas no incluidos en el programa de estudios de Matemáticas NM (no obstante, ello no será objeto de sanción).

Criterios de evaluación interna

La exploración es evaluada internamente por el profesor y moderada externamente por el IB utilizando criterios de evaluación que se refieren a los objetivos de evaluación de Matemáticas NM.

Cada exploración se evalúa según los cinco criterios siguientes. La nota final de cada exploración es la suma de los puntos obtenidos en cada criterio. La nota final máxima es 20.

Los alumnos que no presenten una exploración no recibirán una calificación final para Matemáticas NM.

| | |
|-------------------|-------------------------|
| Criterio A | Comunicación |
| Criterio B | Presentación matemática |
| Criterio C | Compromiso personal |
| Criterio D | Reflexión |
| Criterio E | Uso de las matemáticas |

Criterio A: Comunicación

Este criterio evalúa la organización y la coherencia de la exploración. Una exploración bien organizada consta de una introducción, unas bases o fundamentos (incluida la explicación de por qué se eligió el tema), una descripción del objetivo general de la exploración y una conclusión. Una exploración coherente está desarrollada de modo lógico y es fácil de seguir.

Se deben incluir los gráficos, las tablas y los diagramas donde corresponda en el trabajo y no adjuntarlos como anexos al final del documento.

| Nivel | Descriptor de nivel |
|-------|---|
| 0 | La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación. |
| 1 | La exploración tiene cierta coherencia. |
| 2 | La exploración tiene cierta coherencia y muestra cierta organización. |
| 3 | La exploración es coherente y está bien organizada. |
| 4 | La exploración es coherente, está bien organizada, y es concisa y completa. |

Criterio B: Presentación matemática

Este criterio evalúa en qué medida el alumno es capaz de:

- Utilizar el lenguaje matemático apropiado (por ejemplo, notación, símbolos y terminología)
- Definir términos clave, cuando sea necesario
- Utilizar múltiples formas de representación matemática, tales como fórmulas, diagramas, tablas, gráficos y modelos, donde resulte apropiado

Se espera de los alumnos que utilicen el lenguaje matemático a la hora de comunicar ideas, razonamientos y hallazgos matemáticos.

Se anima a los alumnos a elegir y a utilizar las herramientas tecnológicas apropiadas, como calculadoras de pantalla gráfica, capturas de pantalla, programas de elaboración de gráficos, hojas de cálculo, bases de datos, procesadores de texto y programas de dibujo, según corresponda, con el fin de mejorar la comunicación matemática.

| Nivel | Descriptor de nivel |
|-------|---|
| 0 | La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación. |
| 1 | La presentación matemática es, en cierto grado, adecuada. |
| 2 | La presentación matemática es, en su mayor parte, adecuada. |
| 3 | La presentación matemática es adecuada en su totalidad. |

Criterio C: Compromiso personal

Este criterio evalúa la medida en que el alumno se compromete con la exploración y la hace propia. El compromiso personal se puede reconocer en distintos atributos y destrezas. Entre ellos se encuentra el pensamiento independiente o creativo, la elección de temas de interés personal y la presentación de ideas matemáticas a su manera.

| Nivel | Descriptor de nivel |
|-------|---|
| 0 | La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación. |
| 1 | Hay indicios de un compromiso personal limitado o superficial. |
| 2 | Hay indicios de cierto compromiso personal. |
| 3 | Hay indicios de un importante compromiso personal. |
| 4 | Hay numerosos indicios de un excelente compromiso personal. |

Criterio D: Reflexión

Este criterio evalúa en qué medida el alumno revisa, analiza y evalúa la exploración. Aunque la reflexión se puede ver en las conclusiones de la exploración, también se puede encontrar a lo largo del trabajo.

| Nivel | Descriptor de nivel |
|-------|---|
| 0 | La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación. |
| 1 | Hay indicios de una reflexión limitada o superficial. |
| 2 | Hay indicios de una reflexión significativa. |
| 3 | Hay indicios contundentes de una reflexión crítica. |

Criterio E: Uso de las matemáticas

Este criterio evalúa en qué medida los alumnos utilizan las matemáticas en la exploración.

Se espera de los alumnos que elaboren un trabajo que sea acorde con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados deben ser, bien parte del programa de estudios, o bien de un nivel similar o superior. Estos aspectos no deben estar basados únicamente en los temas de matemáticas incluidos en los conocimientos previos. Si el nivel de matemáticas no es acorde con el nivel del curso, se puede otorgar, como máximo, dos puntos en este criterio.

Las matemáticas se pueden considerar correctas incluso si existen errores menores ocasionales, siempre y cuando no desvirtúen el razonamiento matemático o lleven a resultados poco razonables.

| Nivel | Descriptor de nivel |
|-------|---|
| 0 | La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación. |
| 1 | Se utilizan unas matemáticas algo pertinentes. |
| 2 | Se utilizan unas matemáticas algo pertinentes. Se demuestra una comprensión limitada. |
| 3 | Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Se demuestra una comprensión limitada. |
| 4 | Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados son parcialmente correctos. Se demuestran cierto conocimiento y cierta comprensión. |
| 5 | Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados son, en su mayor parte, correctos. Se demuestran un conocimiento y una comprensión buenos. |
| 6 | Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados son correctos. Se demuestran un conocimiento y una comprensión sólidos. |

Glosario de términos de instrucción

Términos de instrucción con definiciones

Los alumnos deberán familiarizarse con los siguientes términos y expresiones utilizados en las preguntas de examen. Los términos se deberán interpretar tal y como se describe a continuación. Aunque estos términos se usarán en las preguntas de examen, también podrán usarse otros términos con el fin de guiar a los alumnos para que presenten un argumento de una manera específica.

| | |
|---|---|
| A partir de lo anterior | Utilizar los resultados obtenidos anteriormente para responder a la pregunta. |
| A partir de lo anterior o de cualquier otro modo | La expresión sugiere que se utilicen los resultados obtenidos anteriormente, pero también pueden considerarse válidos otros métodos. |
| Calcular | Obtener una respuesta numérica y mostrar las operaciones pertinentes. |
| Comentar | Emitir un juicio basado en un enunciado determinado o en el resultado de un cálculo. |
| Comparar | Exponer las semejanzas entre dos (o más) elementos o situaciones refiriéndose constantemente a ambos (o a todos). |
| Comparar y contrastar | Exponer las semejanzas y diferencias entre dos (o más) elementos o situaciones refiriéndose constantemente a ambos (o a todos). |
| Contrastar | Exponer las diferencias entre dos (o más) elementos o situaciones refiriéndose constantemente a ambos (o a todos). |
| Deducir | Establecer una conclusión a partir de la información suministrada. |
| Demostrar | Aclarar mediante razonamientos o datos, ilustrando con ejemplos o aplicaciones prácticas. |
| Derivar | Obtener la derivada de una función. |
| Describir | Exponer detalladamente. |
| Determinar | Obtener la única respuesta posible. |
| Dibujar aproximadamente | Representar por medio de un diagrama o un gráfico (rotulados si fuese necesario). El esquema deberá dar una idea general de la figura o relación que se pide y deberá incluir las características pertinentes. |
| Dibujar con precisión | Representar a lápiz por medio de un diagrama o un gráfico precisos y rotulados. Se debe utilizar la regla para las líneas rectas. Los diagramas se deben dibujar a escala. En los gráficos, cuando el caso lo requiera, los puntos deben aparecer correctamente marcados y unidos, bien por una línea recta, o por una curva suave. |
| Distinguir | Indicar de forma clara las diferencias entre dos o más conceptos o elementos. |
| Elaborar | Mostrar información de forma lógica o con un diagrama. |

| | |
|--------------------|--|
| Enumerar | Proporcionar una lista de respuestas cortas sin ningún tipo de explicación. |
| Escribir | Obtener la respuesta (o respuestas), por lo general, a partir de la información que se puede extraer. Se requieren pocos cálculos o ninguno, y no es necesario mostrar los pasos que se han seguido. |
| Estimar | Obtener un valor aproximado. |
| Explicar | Exponer detalladamente las razones o causas de algo. |
| Hallar | Obtener una respuesta mostrando los pasos pertinentes. |
| Identificar | Dar una respuesta entre un número de posibilidades. |
| Indicar | Especificar un nombre, un valor o cualquier otro tipo de respuesta corta sin aportar explicaciones ni cálculos. |
| Integrar | Obtener la integral de una función. |
| Interpretar | Utilizar los conocimientos y la comprensión para reconocer tendencias y extraer conclusiones a partir de información determinada. |
| Investigar | Observar, estudiar o realizar un examen detallado y sistemático para probar hechos y llegar a nuevas conclusiones. |
| Justificar | Proporcionar razones o pruebas válidas que respalden una respuesta o conclusión. |
| Mostrar | Indicar los pasos realizados en un cálculo o deducción. |
| Mostrar que | Obtener el resultado requerido (posiblemente, utilizando la información dada) sin necesidad de una prueba. En este tipo de preguntas, por lo general, no es necesario el uso de la calculadora. |
| Predecir | Dar un resultado esperado. |
| Resolver | Obtener la respuesta por medio de métodos algebraicos, numéricos o gráficos. |
| Rotular | Añadir rótulos o encabezamientos a un diagrama. |
| Situar | Marcar la posición de puntos en un diagrama. |
| Sugerir | Proponer una solución, una hipótesis u otra posible respuesta. |
| Verificar | Proporcionar pruebas que validen el resultado. |

Notación

Entre los diversos tipos de notación usuales, el IB ha decidido adoptar un sistema que sigue las recomendaciones de la Organización Internacional de Normalización (ISO). Esta notación se utiliza en las pruebas de examen de este curso sin explicaciones. Si en una prueba de examen determinada se utilizasen otras formas de notación no contenidas en esta guía, estas vendrían definidas dentro de la pregunta donde aparezcan.

Puesto que los alumnos deben reconocer, aunque no necesariamente utilizar, la notación del IB empleada en los exámenes, se recomienda que los profesores la introduzcan lo antes posible. Durante los exámenes **no** está permitido consultar esta notación.

Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta y no la de las calculadoras.

| | |
|-----------------------|--|
| \mathbb{N} | conjunto de los números enteros positivos y el cero, $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ |
| \mathbb{Z} | conjunto de los números enteros, $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ |
| \mathbb{Z}^+ | conjunto de los números enteros positivos, $\{1, 2, 3, \dots\}$ |
| \mathbb{Q} | conjunto de los números racionales |
| \mathbb{Q}^+ | conjunto de los números racionales positivos, $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$ |
| \mathbb{R} | conjunto de los números reales |
| \mathbb{R}^+ | conjunto de los números reales positivos, $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ |
| $\{x_1, x_2, \dots\}$ | conjunto de los elementos x_1, x_2, \dots |
| $n(A)$ | número de elementos del conjunto finito A |
| $\{x \mid \}$ | conjunto de todos los elementos x , tales que |
| \in | es un elemento de/pertenece a |
| \notin | no es un elemento de/no pertenece a |
| \emptyset | conjunto vacío |
| U | conjunto universal |
| \cup | unión |

| | |
|------------------------|---|
| \cap | intersección |
| \subset | es un subconjunto propio de |
| \subseteq | es un subconjunto de/está contenido en |
| A' | conjunto complementario del conjunto A |
| $a b$ | a divide a b |
| $a^{1/n}, \sqrt[n]{a}$ | a elevado a $\frac{1}{n}$, raíz n -ésima (enésima) de a (si $a \geq 0$ entonces $\sqrt[n]{a} \geq 0$) |
| $ x $ | el módulo o valor absoluto de x , es decir $\begin{cases} x & \text{para } x \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ -x & \text{para } x < 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$ |
| \approx | es aproximadamente igual a |
| $>$ | es mayor que |
| \geq | es mayor o igual que |
| $<$ | es menor que |
| \leq | es menor o igual que |
| \nlessgtr | no es mayor que |
| \nlessgtr | no es menor que |
| u_n | término n -ésimo (enésimo) de una progresión |
| d | diferencia de una progresión aritmética |
| r | razón de una progresión geométrica |
| S_n | suma de los n primeros términos de una progresión, $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ |
| S_∞ | suma de los infinitos términos de una progresión, $u_1 + u_2 + \dots$ |
| $\sum_{i=1}^n u_i$ | $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ |
| $\binom{n}{r}$ | el r -ésimo coeficiente, $r = 0, 1, 2, \dots$, del desarrollo de la potencia de un binomio $(a+b)^n$ |
| $f: A \rightarrow B$ | f es una función que asigna a cada elemento del conjunto A una imagen en el conjunto B |

| | |
|-------------------------------|---|
| $f : x \mapsto y$ | f es una función que aplica x en y |
| $f(x)$ | imagen de x por la función f |
| f^{-1} | función inversa de la función f |
| $f \circ g$ | función compuesta de f y g |
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ | límite de $f(x)$ cuando x tiende a a |
| $\frac{dy}{dx}$ | derivada de y con respecto a x |
| $f'(x)$ | derivada de $f(x)$ con respecto a x |
| $\frac{d^2 y}{dx^2}$ | derivada segunda de y con respecto a x |
| $f''(x)$ | derivada segunda de $f(x)$ con respecto a x |
| $\frac{d^n y}{dx^n}$ | derivada n-ésima de y con respecto a x |
| $f^{(n)}(x)$ | derivada n-ésima de $f(x)$ con respecto a x |
| $\int y dx$ | integral indefinida de y con respecto a x |
| $\int_a^b y dx$ | integral definida de y con respecto a x entre los límites $x = a$ y $x = b$ |
| e^x | función exponencial (de base e) de x |
| $\log_a x$ | logaritmo en base a de x |
| $\ln x$ | logaritmo natural de x , $\log_e x$ |
| sen, cos, tan | funciones trigonométricas (circulares) |
| $A(x, y)$ | punto A del plano, de coordenadas cartesianas x e y |
| $[AB]$ | segmento de recta con extremos en los puntos A y B |
| AB | longitud de $[AB]$ |
| (AB) | recta que pasa por los puntos A y B |
| \hat{A} | ángulo de vértice A |

| | |
|--------------------------------------|--|
| \hat{CAB} | ángulo formado por las rectas $[CA]$ y $[AB]$ |
| $\triangle ABC$ | triángulo de vértices A , B y C |
| \mathbf{v} | vector \mathbf{v} |
| \overrightarrow{AB} | vector definido en módulo, dirección y sentido por el segmento de recta orientado de A a B |
| \mathbf{a} | vector de posición \overrightarrow{OA} |
| $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ | vectores unitarios en las direcciones de los ejes de coordenadas cartesianos |
| $ \mathbf{a} $ | módulo de \mathbf{a} |
| $ \overrightarrow{AB} $ | módulo de \overrightarrow{AB} |
| $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ | producto escalar de \mathbf{v} y \mathbf{w} |
| $P(A)$ | probabilidad del suceso A |
| $P(A')$ | probabilidad del suceso “no A ” |
| $P(A B)$ | probabilidad del suceso A dado el suceso B |
| x_1, x_2, \dots | valores observados |
| f_1, f_2, \dots | frecuencias con que ocurren los valores observados x_1, x_2, \dots |
| $\binom{n}{r}$ | número de formas de seleccionar r elementos entre n elementos |
| $B(n, p)$ | distribución binomial de parámetros n y p |
| $N(\mu, \sigma^2)$ | distribución normal de media μ y varianza σ^2 |
| $X \sim B(n, p)$ | la variable aleatoria X tiene una distribución binomial de parámetros n y p |
| $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ | la variable aleatoria X tiene una distribución normal de media μ y varianza σ^2 |
| μ | media de la población |
| σ^2 | varianza de la población |
| σ | desviación típica de la población |

| | |
|-----------|---|
| \bar{x} | media de un conjunto de datos, x_1, x_2, x_3, \dots |
| Z | variable normal tipificada o estandarizada, $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ |
| Φ | función de distribución acumulada de la variable normal tipificada o estandarizada con distribución $N(0, 1)$ |
| r | coeficiente de correlación momento-producto de Pearson |